現代的な視点からの

場の量子論 発展編

V.P.ナイア 著

阿部泰裕／磯 暁 訳

Springer
シュプリンガー・ジャパン

Translation from the English language edition:
Quantum Field Theory by V.P. Nair

目 次

第13章　量子異常 I *1*

13.1　量子異常とは *1*

13.2　量子異常の計算 *2*

13.3　量子異常の構造 —— なぜ取り除けないのか *10*

13.4　標準模型における量子異常 *13*

13.5　π^0 中間子崩壊のラグランジアン *17*

13.6　軸性 $U(1)$ 問題 *19*

第14章　微分幾何学入門 *23*

14.1　多様体，ベクトル場，微分形式 *23*

14.2　多様体の幾何学的構造と重力 *36*

14.2.1　リーマン構造と重力 *36*

14.2.2　複素多様体 *40*

14.3　コホモロジー群 *43*

14.4　ホモトピー *48*

14.5　ゲージ場 *54*

14.5.1　電磁力学 *54*

14.5.2　ディラックの磁気単極子 —— 第一考 *56*

14.5.3　非アーベル型ゲージ場 *58*

14.6　ファイバー束 *61*

14.7　ファイバー束の概念の応用 *66*

14.7.1　磁気単極子のまわりのスカラー場 *66*

14.7.2　グリボフ問題 *67*

14.8　特性類 *70*

第15章 経路積分 *75*
15.1 時間発展と経路積分 *75*
15.2 シュレーディンガー方程式 *79*
15.3 場の理論への一般化 *80*
15.4 経路積分の解釈 *86*
15.5 配位空間 $\mathcal{C}$ が非自明な基本群をもつ場合 *86*
15.6 $\mathcal{H}^2(\mathcal{C}) \neq 0$ の場合 *89*

第16章 ゲージ理論 —— その配位空間 *97*
16.1 配位空間 *97*
16.2 QCD の経路積分 *104*
16.3 インスタントン *107*
16.4 フェルミ粒子と指数定理 *110*
16.5 標準模型におけるバリオン数の破れ *115*

第17章 量子異常 II *119*
17.1 量子異常と汎関数積分 *119*
17.2 量子異常と指数定理 *121*
17.3 標準模型における混合アノマリー *126*
17.4 QCD フレーバーアノマリーの有効作用 *127*
17.5 大域的あるいは非摂動的な量子異常 *130*
17.6 ヴェス–ズミノ–ウィッテン (WZW) 作用 *135*
17.7 2 次元のディラック行列式 *138*

第18章 有限温度と有限密度 *147*
18.1 密度行列とアンサンブル平均 *147*
18.2 スカラー場の理論 *150*
18.3 有限温度・密度におけるフェルミ粒子 *153*
18.4 熱平均についての条件式 *155*
18.5 熱源からの輻射 *156*
18.6 ゲージ場の遮蔽 —— アーベル型の場合 *159*
18.7 ゲージ場の遮蔽 —— 非アーベル型の場合 *165*
18.8 遅延・時間順序関数と久保公式 *171*
18.9 Im $\Pi_R^{\mu\nu}$ の物理的な意味 *175*
18.10 非平衡現象と量子的な気体分子運動論 *177*
18.11 虚時間形式 *184*
18.12 高温での対称性の回復 *190*
18.13 標準模型における対称性の回復 *194*

第19章　ゲージ理論 —— 非摂動的なアプローチ　*201*
19.1　クォークの閉じ込めと双対超伝導 *201*
19.1.1　閉じ込めの一般的な描像 *201*
19.1.2　ウィルソン・ループの面積則 *204*
19.1.3　トポロジカル渦糸 *207*
19.1.4　非アーベル型双対超伝導 *214*
19.2　トフーフト–ポリヤコフの磁気単極子 *217*
19.3　$1/N$ 展開 *223*
19.4　$1/N$ 展開におけるメソンとバリオン *228*
19.4.1　カイラル対称性の破れとメソン *228*
19.4.2　バリオン *231*
19.4.3　スキルミオンのバリオン数 *235*
19.4.4　スキルミオンのスピンとフレーバー *236*
19.5　格子ゲージ理論 *240*
19.5.1　なぜ格子なのか *240*
19.5.2　プラケットとウィルソン作用 *241*
19.5.3　フェルミ粒子の重複問題 *246*

第20章　幾何学的量子化入門　*253*
20.1　一般的な構造 *253*
20.2　古典力学 *260*
20.3　幾何学的量子化 *262*
20.4　量子化における位相幾何学的な特徴 *267*
20.5　幾何学的量子化のまとめ *271*
20.6　応用例 *272*
20.6.1　コヒーレント状態 *272*
20.6.2　2 次元球面の量子化 *273*
20.6.3　G/H 型のコンパクト・ケーラー空間 *279*
20.6.4　モノポール場における荷電粒子 *282*
20.6.5　エニオン —— 分数スピンをもつ粒子 *284*
20.6.6　場の量子化，同時刻，光錐座標 *288*
20.6.7　(2+1) 次元チャーン–サイモンズ理論 *291*
20.6.8　非アーベル型ゲージ理論における θ 真空 *299*
20.6.9　WZW 模型のカレント代数 *302*

訳者あとがき　*311*

索　引　*313*

基礎編の目次

まえがき

第1章　相対論的量子力学のまとめ
1.1　表記法
1.2　スピン0粒子
1.3　ディラック方程式

第2章　場の構成法
2.1　粒子と場の対応関係
2.2　スピン0ボース粒子
2.3　ラグランジアンとハミルトニアン
2.4　汎関数微分
2.5　フェルミ粒子の場の演算子

第3章　正準量子化
3.1　ラグランジアン，相空間，ポアソン括弧
3.2　量子化の規則
3.3　自由スカラー場の量子化
3.4　ディラック場の量子化
3.5　対称性と保存則
3.6　エネルギー運動量テンソル
3.7　電磁場
3.8　エネルギー運動量テンソルと一般相対論
3.9　スカラー場の光錐量子化
3.10　マクスウェル方程式の共形不変性

第4章　交換子と伝播関数
4.1　スカラー場の伝播関数
4.2　フェルミ粒子の伝播関数
4.3　グラスマン数とフェルミ粒子の生成汎関数

第5章　相互作用と S 行列
5.1　S 行列の一般公式
5.2　ウィックの定理
5.3　S 行列の摂動展開
5.4　崩壊確率と散乱断面積
5.5　スカラー場以外への一般化
5.6　N 点関数の演算子公式

第6章　電磁場
6.1　量子化と光子
6.2　荷電粒子との相互作用
6.3　量子電磁力学 (QED)

第7章　散乱過程の例
7.1　光子と荷電スカラー粒子の散乱
7.2　クーロン場での電子散乱
7.3　媒質中での低速中性子散乱
7.4　コンプトン散乱
7.5　π^0 中間子の崩壊
7.6　チェレンコフ放射
7.7　ρ 中間子の崩壊

第8章　汎関数積分表示
8.1　ボソン場の汎関数積分
8.2　汎関数積分としてのグリーン関数
8.3　フェルミ粒子の汎関数積分
8.4　S 行列汎関数
8.5　ユークリッド化と QED
8.6　非線形シグマ模型
8.7　連結グリーン関数
8.8　量子的な有効作用
8.9　有効作用と S 行列
8.10　ループ展開

第9章　繰り込み
9.1　繰り込みの一般的な手続き
9.2　スカラー場の理論の1ループ繰り込み
9.3　繰り込まれた有効ポテンシャル
9.4　次数の数え上げ規則
9.5　QEDの1ループ繰り込み
9.6　高次の繰り込み
9.7　カウンター項と繰り込み可能性
9.8　スカラー場の繰り込み群方程式
9.9　繰り込み群方程式の解と臨界現象

第10章 ゲージ理論
10.1 ゲージ原理
10.2 平行移動
10.3 電荷とゲージ変換
10.4 ゲージ理論の汎関数量子化
10.5 具体例
10.6 BRST 対称性と物理的状態
10.7 Q 対称性に関するウォード–高橋恒等式
10.8 非アーベル型ゲージ理論の繰り込み
10.9 フェルミオン作用と QED 再考
10.10 伝播関数と有効電荷

第11章 対称性
11.1 対称性の表示法
11.2 ウォード–高橋恒等式
11.3 電磁力学のウォード–高橋恒等式
11.4 離散的対称性
11.5 コンプトン散乱の低エネルギー定理

第12章 自発的対称性の破れ
12.1 連続的大域対称性の自発的破れ
12.2 基底状態の直交性
12.3 ゴールドストンの定理
12.4 コセット空間
12.5 非線形シグマ模型
12.6 南部–ゴールドストン粒子の動力学
12.7 自発的対称性の破れに関する結果のまとめ
12.8 スピン波
12.9 QCD におけるカイラル対称性の破れ
12.10 QCD カイラル対称性の破れの有効作用
12.11 有効ラグランジアンと S 行列のユニタリー性
12.12 ゲージ対称性とヒッグス機構
12.13 標準模型

付 録 相対論的不変性
A-1 ポアンカレ代数
A-2 ポアンカレ代数のユニタリー表現
A-3 質量粒子
A-4 スピン 0 粒子の波動関数
A-5 スピン $\frac{1}{2}$ 粒子の波動関数
A-6 スピン 1 粒子
A-7 無質量粒子
A-8 位置演算子
A-9 等長変換，エニオン

一般的な参考文献

索 引

第 13 章

量子異常 I

13.1 量子異常とは

古典的な場の理論が群 G で表される対称性をもち，ゲージ対称性および大域対称性はこの群の一部とみなせるとしよう．量子論を定義するには，ループ・ダイヤグラムを評価する必要があり，そのなかには発散するものも含まれるので，量子論は正則化を伴って定義されなければならない．その際，すべての対称性を保つような正則化が存在しない場合がある．古典論の対称性のうちで（ある正則化を選んだときに）量子補正の効果で破れるものを異常な対称性と呼ぶ．対応するカレントはゼロでない発散をもち，これは量子異常（アノマリー）と呼ばれる．

正則化と対称性の関係を具体例で見てみよう．次元正則化は，ローレンツ不変性とベクトル・ゲージ不変性（あるいは BRST 不変性）を保つという大きな利点をもつ．しかし，$\gamma^5 = (i/4!)\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta$ は，ϵ テンソルを含むので 4 次元以外の次元に自然に拡張することはできない．したがって，次元正則化をもちいるとカイラル対称性は量子異常をもちうる．もう 1 つよく使われる正則化としてパウリ–ヴィラース (Pauli–Villars) 正則化がある．この正則化では非常に重い非物理的な（ヒルベルト空間上のノルムが負となる）粒子を追加し，その質量 M を正則化のパラメータとみなす．ところが，$M\bar{\psi}\psi$ のような質量項はカイラル変換のもとで不変でないので，カイラル対称性は量子異常をもつ可能性がある．

アノマリーには，大域対称性に関するものとゲージ対称性に関するものの

2種類がある．大域対称性のアノマリーの場合，対称性は量子論では実現されないが，その点を除けば理論に矛盾はない．例として，QEDとQCDでの軸性 $U_A(1)$ アノマリー（カイラルアノマリー）が挙げられる．これらの対称性が自発的に破れると，古典的には南部–ゴールドストン・ボソンが生成される．量子論的には，対称性がないので,（質量ゼロの）南部–ゴールドストン・ボソンは現れない．実際，量子補正によって潜在的な南部–ゴールドストン・ボソンに質量が与えられる．

一方，ゲージ対称性のアノマリーは非物理的な結果を導く．理論のゲージ不変性（またはこれに関連したBRST不変性）は S 行列のユニタリー性あるいはより一般に時間発展のユニタリー性の証明に不可欠である．ゲージ不変性はゲージ粒子の非物理的な偏極を取り除く．すなわち，ゲージ不変性がなければ，これらの非物理的な状態は伝播するモードとなりユニタリー性が失われる．したがって，物理的に矛盾のない理論では，ゲージ対称性に関するアノマリーは存在してはならない．理論の一部を見るとゲージ対称性にアノマリーが現れる場合があるかもしれないが，すべての場の寄与を足し上げると，これらのアノマリーは相殺されていなければならない．

13.2　量子異常の計算

つぎに，アノマリーを具体的に計算してみよう．以下では，ほとんどの場合ユークリッド化された場の理論をもちいる．4次元では量子異常はフェルミオンの1ループ図だけから現れる．そこで，次のユークリッド作用

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \int \left[\frac{1}{4e_L^2}F_L^2 + \frac{1}{4e_R^2}F_R^2 + \bar{\psi}_L\gamma\cdot(\partial + L)\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma\cdot(\partial + R)\psi_R\right] \\ &= \int \left[\frac{1}{4e_L^2}F_L^2 + \frac{1}{4e_R^2}F_R^2 + \bar{\psi}\gamma\cdot(\partial + V + \gamma^5 A)\psi\right] \qquad (13.1)\end{aligned}$$

を考えよう．ただし，$\psi_L = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi$, $\psi_R = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi$，また $V = \frac{1}{2}(L+R)$, $A = \frac{1}{2}(L-R)$ である．フェルミオンが N 種類あるとしてカイラル対称性 $U(N)_L \times U(N)_R$ を考える．一般性を持たせるため，このフェルミオンのすべてのカイラル対称性はゲージ対称性であるとした．これは $L_\mu = -iT^A L_\mu^A$, $R_\mu = -iT^A R_\mu^A$ と書けることを意味する．ただし，T^A は

$U(N)$ の生成子である．ゲージ場のいくつかをゼロとおくと，この対称性の任意の部分群についての結果を得ることができる．

上式にはフェルミオンの質量項がないことに注意しよう．これは軸性対称性もゲージ化したためである．ただし，軸性対称性だけでなくベクトル対称性にもゲージ化を要請すると，ゲージ不変な質量項は存在しない．また，ゲージ群をある部分群に制限するとゲージ不変な質量項が許される可能性はあるが，アノマリーの計算には質量項は影響を与えないので，ここでは考える必要がない．この点は後で明らかになるであろう．場の強さのテンソルは

$$\begin{aligned}
F^A_{L\mu\nu} &= \partial_\mu L^A_\nu - \partial_\nu L^A_\mu + f^{ABC} L^B_\mu L^C_\nu, \\
F^A_{R\mu\nu} &= \partial_\mu R^A_\nu - \partial_\nu R^A_\mu + f^{ABC} R^B_\mu R^C_\nu, \\
F^A_{V\mu\nu} &= \partial_\mu V^A_\nu - \partial_\nu V^A_\mu + f^{ABC} V^B_\mu V^C_\nu + f^{ABC} A^B_\mu A^C_\nu, \\
F^A_{A\mu\nu} &= \partial_\mu A^A_\nu - \partial_\nu A^A_\mu + f^{ABC} (V^B_\mu A^C_\nu - V^B_\nu A^C_\mu) \\
&= (D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu)^A
\end{aligned} \tag{13.2}$$

で定義される．ここで，D はベクトルゲージ場についてのみの共変微分である．

作用 (13.1) に次の形の項

$$\mathcal{S}_{Reg} = -\sum_{L,R} \int \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu} \frac{(-D^2)}{\Lambda^2} F^{\mu\nu} \right) \tag{13.3}$$

を（ベクトルゲージ場と軸性ゲージ場の両方について）付け加えることができる．この項は高階微分をもつので，運動量 p が大きいときのゲージボソンの伝播関数の振る舞いは

$$G \sim \frac{\Lambda^2}{p^4 + \Lambda^2 p^2} \sim \frac{\Lambda^2}{p^4} \tag{13.4}$$

となり，ゲージボソンの伝播関数を含むファインマン図は正則化される．また，(13.3) はゲージ不変なので，1 ループ図以外の発散する可能性のあるファインマン図に対してゲージ不変な正則化を与える[1]．ここで，Λ はゲージ不変

---

[1]［訳註］2 ループ以上のファインマン図には必ずゲージ場の伝播関数が含まれる．そのため，このようにゲージ場の伝播関数を変更すると，2 ループ以上の発散は正則化される．

なカットオフの役割を果たす．一方，1 ループ図は (13.3) によって正則化されないフェルミオンループを含む．また，(13.3) により新しい頂点（相互作用）が導入され，別の正則化が必要な発散する 1 ループ図が現れる．これらのことから，1 ループ図の正則化については結論づけることはできない．ここでは，すべての対称性をゲージ対称性としたので，どのような連続対称性もこのゲージ対称性に含まれる．これはアノマリーが 1 ループ図に限定されることを示す．そこで，発散次数を数え上げると，アノマリーはフェルミオンの 1 ループ図から現れることがわかる．(高次ループの効果はアノマリーに現れるパラメータに繰り込まれる.)

アノマリーに寄与する発散を含むファインマン図は図 13.1 のとおりである．これらにおいて，外線はベクトル (V) あるいは軸性ベクトル (A) のいずれかである．ここで 2 点関数はゲージ不変に評価した真空分極のダイヤグラムで，これはアノマリーを導かない．三角形のダイヤグラムについては，VVV 図は荷電共役不変性からゼロである（ファリーの定理）．これは

$$\int d^4x\ \bar{\psi}\gamma\cdot(\partial + V + \gamma^5 A)\psi = \int d^4x\ \bar{\psi}^c\gamma\cdot(\partial - V + \gamma^5 A)\psi^c \tag{13.5}$$

であることからわかる．ただし，ψ^c は荷電共役な場を表す．したがって，異常性をもつファインマン図は AVV と AAA の図である．AVV の図による有効作用への寄与は

$$\begin{aligned}\Gamma^{(3)} &= \int d^4x d^4y d^4z\,\mathrm{Tr}\left[S(x,y)\gamma^5\gamma\cdot A(y)S(y,z)\gamma\cdot V(z)S(z,x)\gamma\cdot V(x)\right]\\ &= \int d\mu(q,p_1,p_2)\ \mathrm{Str}[A_\mu(2q)V_\alpha(p_1)V_\beta(p_2)]\,\mathcal{I}^{\mu\alpha\beta}(q,p_1,p_2)\end{aligned} \tag{13.6}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}d\mu(q,p_1,p_2) &= \frac{d^4(2q)}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\delta^{(4)}(2q-p_1-p_2),\\ \mathcal{I}^{\mu\alpha\beta}(q,p_1,p_2) &=\\ &\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{i\gamma\cdot(k-q)}\gamma^5\gamma^\mu\frac{1}{i\gamma\cdot(k+q)}\gamma^\alpha\frac{1}{i\gamma\cdot(k-r)}\gamma^\beta\right]\end{aligned} \tag{13.7}$$

である．ここで，$r=\frac{1}{2}(p_1-p_2)$ である．また $\mathrm{Str}[A_\mu(2q)V_\alpha(p_1)V_\beta(p_2)]$ は，群の生成子についての対称トレースをとることを意味する．すなわち，

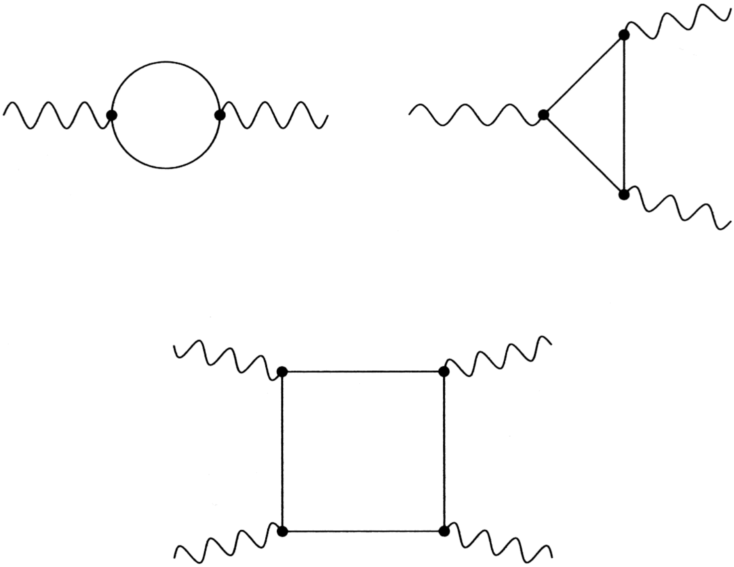


図 13.1　アノマリーの計算に重要となる発散する可能性のあるダイヤグラム.

$$\mathrm{Str}[AVV] = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\,[AVV + VAV + VVA] \tag{13.8}$$

である. (13.7) の積分 $\mathcal{I}^{\mu\alpha\beta}(q, p_1, p_2)$ は見かけ上の 1 次発散をもつ. 微小ゲージ変換は

$$\begin{aligned} V_\alpha &\to V_\alpha + D_\alpha \theta, \\ A_\alpha &\to A_\alpha + D_\alpha \varphi \end{aligned} \tag{13.9}$$

で与えられる. これは運動量空間で

$$\begin{aligned} V_\alpha(p) &\to V_\alpha(p) + ip_\alpha \theta(p) + \cdots, \\ A_\alpha(p) &\to A_\alpha(p) + ip_\alpha \varphi(p) + \cdots \end{aligned} \tag{13.10}$$

と表される. よって, 三角ダイヤグラムに対応する有効作用の項のベクトルゲージ変換のもとでの変分は

$$\delta_\theta \Gamma^{(3)} = -\int d\mu(q, p_1, p_2)\, \mathrm{Str}[A_\mu(2q)\theta(p_1)V_\alpha(p_2)]\, \mathcal{F}^{\mu\alpha}(q, p_1, p_2),$$

$$\mathcal{F}^{\mu\alpha}(q,p_1,p_2)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\gamma\cdot(k-q)}\gamma^5\gamma^\mu\frac{1}{\gamma\cdot(k-r)}\gamma^\alpha\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\gamma\cdot(k+r)}\gamma^5\gamma^\mu\frac{1}{\gamma\cdot(k+q)}\gamma^\alpha\right] \quad (13.11)$$

となる．ここで，$p_1=(k+q)-(k-r)$, $p_2=(k-r)-(k-q)$ をもちいた．トレースを計算し，$k'=k+p_1$ と書くと，

$$\mathcal{F}^{\mu\alpha}(q,p_1,p_2)=-4\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{(k-q)_\nu(k-r)_\beta}{(k-q)^2(k-r)^2}-(k\leftrightarrow k')\right] \quad (13.12)$$

を得る．したがって，もし第 2 項で積分変数を k' に変換することができれば，$\mathcal{F}^{\mu\alpha}(q,p_1,p_2)$ はゼロとなり，ベクトルゲージ変換についての $\Gamma^{(3)}$ のゲージ不変性が得られる．しかし，(13.12) の積分は 1 次発散し，この積分変数の変換はゼロでない表面項を生む．これは

$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[f(k+a)-f(k)\right]=a_\nu\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\partial f}{\partial k^\nu}+\cdots$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\left[fa_\nu\hat{k}^\nu k^3\ d\Omega^{(3)}\right]_{k\to\infty} \quad (13.13)$$

であることからわかる．($k\to\infty$ なので，高次の項はゼロとなる．) この結果をもちいると，

$$\mathcal{F}^{\mu\alpha}(q,p_1,p_2)=4\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\int\frac{(k-q)_\nu(k-r)_\beta}{(k-q)^2(k-r)^2}k^3p_{1\lambda}\hat{k}^\lambda\left.\frac{d\Omega^{(3)}}{(2\pi)^4}\right]_{k\to\infty}$$
$$=4\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\int\frac{d\Omega^{(3)}}{(2\pi)^4}\hat{k}_\nu\,(q-r)_\beta\,p_{1\lambda}\hat{k}^\lambda$$
$$=4\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(\frac{\delta_{\nu\lambda}}{4}\right)p_{1\lambda}\,p_{2\beta}\frac{\mathrm{Vol}(S^3)}{16\pi^4}$$
$$=\frac{1}{8\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_{1\nu}p_{2\beta} \quad (13.14)$$

となる．ここで，(13.11) の結果は，座標空間に戻って

$$\delta_\theta\Gamma^{(3)}=-\frac{1}{8\pi^2}\int d^4x\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\left(A_\mu\partial_\nu\theta\,\partial_\alpha V_\beta\right) \quad (13.15)$$

と変形できる．

軸性変換については,

$$\delta_\varphi \Gamma^{(3)} = -\int d\mu(q,p_1,p_2)\,\mathrm{Str}[\varphi(2q)V_\alpha(p_1)V_\beta(p_2)]\mathcal{H}^{\alpha\beta}(q,p_1,p_2),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\alpha\beta}(q,p_1,p_2) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{\gamma\cdot(k-q)}\gamma^5\,2\gamma\cdot q\frac{1}{\gamma\cdot(k+q)}\right.\\ &\qquad\left.\gamma^\alpha\frac{1}{\gamma\cdot(k-r)}\gamma^\beta\right]\\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\gamma^5\frac{1}{\gamma\cdot(k+q)}\gamma^\alpha\frac{1}{\gamma\cdot(k-r)}\gamma^\beta\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{\gamma\cdot(k-q)}\gamma^5\gamma^\alpha\frac{1}{\gamma\cdot(k-r)}\gamma^\beta\right] \end{aligned} \tag{13.16}$$

となることがわかる. ただし, 最後の等式で $\gamma^5 2\gamma\cdot q = \gamma\cdot(k-q)\gamma^5 + \gamma^5\gamma\cdot(k+q)$ をもちいた. γ 行列のトレースを評価し, 対称性 $V_\alpha(p_1)\leftrightarrow V_\beta(p_2)$ をもちいると, これは次のように変形される.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\alpha\beta} &= -2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left[\frac{(k+q)_\mu(k-r)_\nu}{(k+q)^2(k-r)^2} - \frac{(k+q)_\mu(k+r)_\nu}{(k+q)^2(k+r)^2}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{(k-q)_\nu(k-r)_\mu}{(k-q)^2(k-r)^2} - \frac{(k-q)_\nu(k+r)_\mu}{(k-q)^2(k+r)^2}\right]\\ &= -2\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left[\left\{\frac{(k-q)_\nu(k-r)_\mu}{(k-q)^2(k-r)^2} - (k\to k+p_1)\right\}\right.\\ &\qquad\left.-\left\{\frac{(k-q)_\nu(k+r)_\mu}{(k-q)^2(k+r)^2} - (k\to k+p_2)\right\}\right]\\ &= \frac{1}{8\pi^4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\int d\Omega^{(3)}\left[\hat{k}_\nu(q-r)_\mu p_{1\sigma}\hat{k}^\sigma - \hat{k}_\nu(q+r)_\mu p_{2\sigma}\hat{k}^\sigma\right]\\ &= -\frac{1}{8\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_{1\mu}p_{2\nu}. \end{aligned} \tag{13.17}$$

よって, $\delta_\varphi \Gamma^{(3)}$ は

$$\delta_\varphi \Gamma^{(3)} = -\frac{1}{8\pi^2}\int d^4x\;\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\left(\varphi\partial_\mu V_\nu \partial_\alpha V_\beta\right) \tag{13.18}$$

となる.

(13.15) と (13.18) から

$$\begin{aligned}\delta_\theta \Gamma^{(3)} &= -\frac{1}{8\pi^2}\int d^4x\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,(A_\mu\partial_\nu\theta\,\partial_\alpha V_\beta)\,,\\ \delta_\varphi \Gamma^{(3)} &= -\frac{1}{8\pi^2}\int d^4x\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,(\varphi\partial_\mu V_\nu\partial_\alpha V_\beta)\end{aligned} \tag{13.19}$$

を得る．この変分は両方ともゼロではない．しかしながら，

$$\delta_\theta\left[\frac{1}{8\pi^2}\int d^4x\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,(A_\mu V_\nu\partial_\alpha V_\beta)\right] = \frac{1}{8\pi^2}\int d^4x\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,(A_\mu\partial_\nu\theta\,\partial_\alpha V_\beta) \tag{13.20}$$

となることに注意して，

$$\tilde{\Gamma}^{(3)} = \Gamma^{(3)} + \frac{1}{8\pi^2}\int d^4x\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,(A_\mu V_\nu\partial_\alpha V_\beta) \tag{13.21}$$

と新しい有効作用を定義すると，

$$\begin{aligned}\delta_\theta\tilde{\Gamma}^{(3)} &= 0,\\ \delta_\varphi\tilde{\Gamma}^{(3)} &= -\frac{1}{4\pi^2}\int d^4x\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,(\varphi\partial_\mu V_\nu\partial_\alpha V_\beta)\\ &= -\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,(\varphi f_{\mu\nu}f_{\alpha\beta})\\ &= -\frac{1}{8\pi^2}\int d^4x\ \mathrm{Tr}\left(\varphi f_{\mu\nu}\tilde{f}^{\mu\nu}\right)\end{aligned} \tag{13.22}$$

がみたされる．ここで，$f_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$, $\tilde{f}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\alpha\beta}$ である．（これが本質的にアドラー–ベル–ジャッキーフ (Adler–Bell–Jackiw) の結果である.）(13.21) で追加した（次元ゼロの）局所項はカウンター項である．この項を追加して量子作用を再定義することは，正則化を変更することと同じである．したがって，正則化を適切に選んで再定義された作用 $\tilde{\Gamma}^{(3)}$ をもちいると，ベクトルゲージ不変性を保つことはできる．ただ，このとき軸性ゲージ不変性を同時にみたすことはできない．$U(1)$ 対称性の場合，軸性対称性を保存しベクトル対称性を破るように正則化を選ぶこともできる．非アーベル型の場合は，軸性変換が群として閉じていないので，そのような正則化を選ぶことはできない．

作用の変分はカレントの保存則をもちいて表すこともできる．$e^{-\Gamma} = \int e^{-\mathcal{S}}$ の定義から，

$$\delta\Gamma = \int \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\theta + \gamma^5\partial_\mu\varphi)\psi \tag{13.23}$$

が成り立つ．すると，式 (13.22) は保存則

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu T^A\psi) &= 0, \\ \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5 T^A\psi) &= \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}\left(T^A f_{\mu\nu}\tilde{f}^{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{13.24}$$

として表すことができる．

ここまでの結果は $AVV + VAV + VVA$ のファインマン図だけを考慮した．AAA 図についてはまだ考えていない．ここで，特に $V_\mu = A_\mu = \frac{1}{2}L_\mu$ となる純粋な左巻きのゲージ場とその変換について考えると，AAA 図は AVV 図と同じになるので，AAA 図も取り入れた結果は上記の結果を 4/3 倍して得ることができる．左巻きのゲージ変換をパラメータ ξ で表すと，V_μ, A_μ の表式から $\theta = \frac{1}{2}\xi$, $\varphi = \frac{1}{2}\xi$ を得るので，

$$\begin{aligned} \delta_\xi\Gamma^{(3)} &= \frac{4}{3}\left\{\left[\delta_\theta\Gamma^{(3)}\right]_{\theta=\frac{1}{2}\xi} + \left[\delta_\varphi\Gamma^{(3)}\right]_{\varphi=\frac{1}{2}\xi}\right\} \\ &= \frac{1}{24\pi^2}\int d^4x\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,(\xi\,\partial_\mu L_\nu\,\partial_\alpha L_\beta) \\ &= -\frac{1}{24\pi^2}\int d^4x\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,(\partial_\mu\xi\,L_\nu\,\partial_\alpha L_\beta) \end{aligned} \tag{13.25}$$

となる．

(13.19), (13.22), (13.25) の結果は三角ダイヤグラムだけに起因する．そのため，ここでは線形化されたゲージ変換 (13.10) のもとでの Γ の振る舞いを解析したにすぎない．例えば，左巻きのゲージ場とその変換には，変換全体のもとでの整合性の要請から $f^{ABC}L^B\xi^C$ の項を含む L^3 の項が現れる．これらの補正は 4 点フェルミオンループとベクトル変換および軸性ベクトル変換についての五角形のダイヤグラムからくる．五角形ダイヤグラムは実際には収束するが，それでも，その一部はアノマリーが適切に変換することを保証するために必要となる．ここではこれらのダイヤグラムを計算する代わりに，整合性の条件から何が要請されるのかを同定しよう．左巻きの場について再度考え，ゲージ変換 $L^A_\mu \to L^A_\mu + (D_\mu\xi)^A = L^A_\mu + \partial_\mu\xi^A + f^{ABC}L^B_\mu\xi^C$ に対して，アノマリー $G(\xi)$ を

$$\delta_\xi \Gamma \equiv G(\xi) \tag{13.26}$$

と定義する．このとき，無限小ゲージ変換 δ_ξ はゲージ場を使って

$$\delta_\xi = \int d^4x \ (D^\mu \xi)^A(x) \frac{\delta}{\delta L^A_\mu(x)} \tag{13.27}$$

と表すことができる．これはゲージポテンシャルのゲージ変換方向に対する並進演算子なので，群の交換関係で決まる代数に従わなければならない．実際，定義 (13.27) から

$$\delta_\xi\, \delta_{\xi'} - \delta_{\xi'}\, \delta_\xi - \delta_{\xi\times\xi'} = 0 \tag{13.28}$$

となることがわかる．ただし，$(\xi\times\xi')^A = f^{ABC}\xi^B\xi'^C$ である．(Γ に物質場に関する頂点関数を含めると，物質場のゲージ変換に対応する項が δ_ξ に追加される．これを取り入れることは簡単で，それによって上記の代数や以下の整合性の条件は変化しない.) 関係式 (13.28) をアノマリーの定義に適用すると，アノマリーの整合性条件が得られる．これはヴェス (Wess) とズミノ (Zumino) によって最初に得られ，ヴェス–ズミノ (WZ) 条件と呼ばれる．

$$\delta_\xi G(\xi') - \delta_{\xi'} G(\xi) - G(\xi\times\xi') = 0. \tag{13.29}$$

アノマリーはどのような表現であれこの条件式を満たさなければならない．$G(\xi)$ の最初の項を具体的な計算から導いたので，$G(\xi)$ が一般形

$$G(\xi) = -\frac{1}{24\pi^2}\int d^4x \ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Str}\left[\partial_\mu\xi\left(L_\nu\partial_\alpha L_\beta + cL_\nu L_\alpha L_\beta\right)\right] \tag{13.30}$$

をもつと仮定しよう．定数 c は WZ の整合性条件を課すことで決めることができる．実際に計算してみると，

$$\delta_\xi \Gamma = G(\xi) = -\frac{1}{24\pi^2}\int d^4x \ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Str}\left[\partial_\mu\xi\left(L_\nu\partial_\alpha L_\beta + \frac{1}{2}L_\nu L_\alpha L_\beta\right)\right] \tag{13.31}$$

となる．左巻きゲージ場のアノマリーの完全な形は上式で与えられる．

13.3　量子異常の構造 —— なぜ取り除けないのか

WZ 整合性条件は，正則化とは無関係に，アノマリーの正確な意味づけを

与えている．ゲージ場の任意の汎関数 W に対して $\delta_\xi W$ を考えると，一般的な代数関係式 (13.28) から整合性条件は導かれる．このこと自体はアノマリーを決定しない．まず大事な点は，Γ は理論によってその基本構造が決まっているので，任意の汎関数 W を付け加えることはできない点である．しかし，ある自由度は残されている．というのも，W が場とその微分からなる局所的な単項式の積分であり，次元がゼロ以下であるならば，そのような項を追加することは，正則化を変えることと同等となるからである．このとき，W は「カウンター項」である．したがって，$G(\xi)$ が (13.29) の解であれば，W の次元がゼロ以下である $G(\xi)+\delta_\xi W$ も解として許される．これは異なる正則化によるアノマリーの形を与える．もし (13.29) の解のすべてが $\delta_\xi W$ の形で与えられるとすると，アノマリーは有効作用が $\tilde{\Gamma}=\Gamma-W$ となるように正則化を選ぶことで取り除くことができる．よって，真のアノマリーは，(13.29) の解があって，局所項の積分で表される次元がゼロ以下の W をもちいて $\delta_\xi W$ と書けない場合にのみ存在する．つまり，

$$\begin{aligned}\delta_\xi G(\xi')-\delta_{\xi'}G(\xi)-G(\xi\times\xi')=0,\\ G(\xi)\neq\delta_\xi W\end{aligned}\tag{13.32}$$

のときアノマリーは取り除けない．次元が 4 以下となる場と微分の単項式（これは次元ゼロ以下の W の項に対応する）のすべてを書き出すことで，解 (13.31) がこの要件を満たしているか確認することができる．これより，アノマリー (13.31) はいかなる正則化によっても取り除けないことがわかる．この点については，のちに 17 章でトポロジカルな視点から言い換える．

アノマリーのもう 1 つの重要な特性はアドラー–バーディーンの定理で与えられる．この定理はアノマリーの形には，場と結合定数を繰り込まれた値に置き換える操作以外に，高次のループ補正が現れないことを示している．ここではこの定理を証明しないが，この定理の成立する理由は，後の章で説明する指数定理と位相幾何学的（トポロジカル）な考察によるアノマリーの議論から理解できる．この定理を使うと，ゲージ変換のアノマリーが相殺されるかどうかは 1 ループの計算を確認するだけで十分なことがわかる．

アノマリーは正則化を変えると $G(\xi)\to G(\xi)+\delta_\xi W$ とシフトするので，アノマリーの形は正則化の選び方によってある程度変えることができる．す

でに見たように，$U(1)$ の場合にはベクトルアノマリー，あるいはベクトルアノマリーと軸性アノマリーのどちらかはゼロにできるが，その両方を (13.21) のようなカウンター項をもちいてゼロとすることはできない．この結果は非常に有用である．例えば，左巻きのゲージ理論の場合，ゲージ変換に対するアノマリーは相殺する必要があるが，それ以外の変換についてはゲージ場をゼロとおけるので大域的な対称性となり，アノマリーがあっても問題ない．この理論に整合性の問題はない．ただ，アノマリーは左巻きのゲージ変換のもとで不変でなければならない．これはカウンター項をもちいて実現できる．同様に，軸性変換のアノマリーの表式もベクトルゲージ不変に表される．この表式には，前述のとおり，四角形・五角形ダイヤグラムが関与するが，最終的な形は対称性と WZ 整合性の議論から次のように決まる．

$$
\begin{aligned}
G(\varphi) = -\frac{1}{4\pi^2}\int d^4x\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Str}\Big[\varphi\Big(&\frac{1}{4}F_{V\mu\nu}F_{V\alpha\beta} + \frac{1}{12}F_{A\mu\nu}F_{A\alpha\beta} \\
&- \frac{2}{3}\left(A_\mu A_\nu F_{V\alpha\beta} + A_\mu F_{V\nu\alpha}A_\beta + F_{V\mu\nu}A_\alpha A_\beta\right) \\
&+ \frac{8}{3}A_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{13.33}
$$

これはバーディーンによって初めて導出された．

つぎに，アノマリーの群構造について考えよう．まず，左巻きのアノマリー (13.31) について考えると，$L_\mu = -iT^A L_\mu^A$, $\xi = -iT^A\xi^A$ なので

$$
\delta_\xi \Gamma = -\frac{i}{24\pi^2}d^{ABC}\int d^4x\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left[\partial_\mu\xi^A\left(L_\nu^B\partial_\alpha L_\beta^C + \frac{1}{4}f^{CRS}L_\nu^B L_\alpha^R L_\beta^S\right)\right] \tag{13.34}
$$

を得る．ここで，$d^{ABC} = \mathrm{Str}(T^A T^B T^C)$ であり，d^{ABC} は変換の生成子が成す代数の階数 3 の対称不変テンソルである．ゲージ変換に対して，d^{ABC} をさまざまなフェルミオン表現について計算することができ，それによりアノマリーが相殺されるかを確認できる．

右巻きのフェルミオンと対応するゲージ場の場合には，$L_\mu \to R_\mu$ と置き換え，さらにアノマリーの符号を左巻きフェルミオンのアノマリーに対して反対符号にすればよい．これは左巻きの場合 $V_\mu = A_\mu = \frac{1}{2}L_\mu$ に対して，右巻きの場合は $V_\mu = -A_\mu = \frac{1}{2}R_\mu$ となるからである．

最後に，$\delta_\xi\Gamma$ は虚数であることに注意しよう．ここではユークリッド計量

で計算しているので，Γ は通常，実数である．このことから，ゲージ不変性の破れは（ユークリッド化された）有効作用の虚部に現れることがわかる．

13.4　標準模型における量子異常

標準模型ではグルーオン場はフェルミオンとベクトル的に結合する．その結果，ゲージアノマリーがないような正則化を選ぶことができる．あるいは，左右のセクターでアノマリーが相殺するように，左右のカイラリティに対して等しく結合するグルーオンを考えればよい．

電弱相互作用の変換において，結合は左右で対称的ではない．その結果，ゲージ変換についてのアノマリーが現れる可能性がある．理論が整合的であるためには，これらは相殺してゲージアノマリーはゼロとなる必要がある．ここで対象となるアノマリーは b^3, b^2, c, c^3 の三角ダイヤグラムから生じるものである[2]．したがって，これらのそれぞれについて d^{ABC} を計算すればよい．以下では，クォークとレプトンの 1 世代についてこの計算を行おう．

b^3 ダイヤグラム

この場合，現れる場は，ゲージ場との結合がない 1 重項状態（シングレット）であるか，生成子が $t^a = \frac{1}{2}\tau^a$ となる 2 重項状態（ダブレット）であるかのいずれかである．

$$d^{abc} = \mathrm{Str}\left(\frac{\tau^a}{2}\frac{\tau^b}{2}\frac{\tau^c}{2}\right) = \frac{1}{8}\mathrm{Tr}(\tau^a\delta^{bc}) = 0 \tag{13.35}$$

であるので，すべてのアノマリーはゼロとなる．

$b^2\,c$ ダイヤグラム

このとき，

$$d^{Yab} = \frac{1}{4}\mathrm{Str}(Y\tau^a\tau^b) = \frac{1}{4}\delta^{ab}\mathrm{Tr}(Y) \tag{13.36}$$

---

[2] ［訳註］b,c はそれぞれ $SU(2)$, $U(1)$ に対応するゲージ場を表す．記号の詳細については 12.13 節を参照されたい．

が必要となる．Y は左巻きフェルミオンのハイパーチャージ行列である．(三角ダイヤグラムの Y 以外の頂点は左巻きのゲージ場 b_μ と結合しているので，右巻きのフェルミオンはループに寄与しない．よって，左巻きフェルミオンについての Y のトレースだけが必要となる.) クォーク・レプトンが 1 世代のとき，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(Y) &= \underbrace{(-1)}_{\nu_L} + \underbrace{(-1)}_{e_L} + \left(\underbrace{\frac{1}{3}}_{u_L} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{d_L} \right) \times 3 \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{13.37}
$$

となる．クォークが 3 倍されるのはカラーの数が 3 であることによる．つまり，クォークは QCD の $SU(3)$ 群のもとで 3 重項（トリプレット）を成すためである．このアノマリーはクォーク・レプトン間で相殺される．

c^3 ダイヤグラム

c^3 のアノマリーは $\mathrm{Tr}(Y^3)$ で与えられ，このとき左右のカイラリティをもつフェルミオン両方が寄与する．よって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(Y^3) &= \left[\underbrace{(-1)}_{\nu_L} + \underbrace{(-1)}_{e_L} + \left(\underbrace{\frac{1}{27}}_{u_L} + \underbrace{\frac{1}{27}}_{d_L} \right) \times 3 \right] \\
&\qquad - \left[\underbrace{-8}_{e_R} + \left(\underbrace{\frac{64}{27}}_{u_R} - \underbrace{\frac{8}{27}}_{d_R} \right) \times 3 \right] \\
&= \left(-\frac{16}{9} \right)_L - \left(-\frac{16}{9} \right)_R \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{13.38}
$$

を得る．このとき，アノマリーの相殺にはクォークとレプトン，さらに左右のカイラリティが関与する．

ここまで，ゲージ不変性を伴うアノマリーについて考えてきたが，標準模型には連続的な大域対称性についてのアノマリーも存在する．2 つの重要な

大域対称性はバリオン数 B とレプトン数 L であり，これらはともに異常な対称性である．$(B-L)$ だけがアノマリーをもたない．これらのアノマリーは，対称性をゲージ化しない限り，理論に矛盾をきたさないが，ゲージ化する場合は，$(B-L)$ の組み合わせだけが唯一矛盾なくゲージ化されうる．

ここで再度，クォークとレプトンの 1 世代（例えば電子世代）について考えよう．レプトン数は次の変換

$$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \to e^{i\alpha} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L, \quad e_R \to e^{i\alpha} e_R, \qquad Q \to Q \tag{13.39}$$

に対応する．レプトン ν, e はレプトン数 1 をもち，クォークはレプトン数をもたない．バリオン数は変換

$$\begin{aligned} &\nu \to \nu, \qquad\qquad e \to e, \\ &\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \to e^{i\beta/3} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \\ &u_R \to e^{i\beta/3} u_R, \qquad\qquad d_R \to e^{i\beta/3} d_R \end{aligned} \tag{13.40}$$

に対応する．レプトンのバリオン数はゼロで，クォークはバリオン数 $\frac{1}{3}$ をもつ．

アノマリーは，1 つの頂点にバリオン数あるいはレプトン数があり，それ以外の頂点に b^2 か c^2 がある三角ダイヤグラムから生じる．(これ以外のダイヤグラムも，アノマリーの共変な表現を得るには重要である．) よって，有効量子作用の変分は一般公式から計算することができ，

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha,\beta}\Gamma = &-i\int d^4x\ \alpha(x)\left[\underbrace{c_2[b]}_{\nu_L,e_L} + \underbrace{c_2[c]}_{\nu_L} + \underbrace{c_2[c]}_{e_L} - \underbrace{4c_2[c]}_{e_R}\right] \\ &-i\int d^4x\ \beta(x)\left[\underbrace{c_2[b]}_{u_L,d_L} + \underbrace{\frac{1}{9}c_2[c]}_{u_L} + \underbrace{\frac{1}{9}c_2[c]}_{d_L} - \underbrace{\frac{16}{9}c_2[c]}_{u_R} - \underbrace{\frac{4}{9}c_2[c]}_{d_R}\right] \\ = &-i\int d^4x\ (\alpha(x)+\beta(x))\Big(c_2[b] - 2\,c_2[c]\Big) \end{aligned} \tag{13.41}$$

を得る．ただし，

$$\begin{aligned} c_2[b] &= \frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}(b)F_{\alpha\beta}(b) = -\frac{1}{64\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}G^a_{\mu\nu}G^a_{\alpha\beta}, \\ c_2[c] &= -\frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu}f_{\alpha\beta}, \\ G^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu b^a_\nu - \partial_\nu b^a_\mu + \epsilon^{abc}b^b_\mu b^c_\nu, \\ f_{\mu\nu} &= \partial_\mu c_\nu - \partial_\nu c_\mu \end{aligned} \tag{13.42}$$

であり，場の強さのテンソルは (12.141) でもちいた表記法に従った．(c_2 は第 2 チャーン類で，16 章で見るように，これはインスタントン数と関係している．) 式 (13.41) のクォーク部分において，QCD の群 $SU(3)$ による縮退の因子 3 はバリオン数の因子 $\frac{1}{3}$ によって相殺される．(13.41) から，バリオン数とレプトン数はともに異常であるが，$\beta = -\alpha$ に対応する組み合わせ $(B - L)$ はアノマリーを持たない（アノマリー・フリーである）ことがわかる．

バリオン数とレプトン数はベクトル的な対称性である．したがって，これらが異常でないように正則化を選ぶことができる．しかし，電弱理論では，(ベクトル的でない）ゲージ対称性をアノマリー・フリーにする正則化を選ばなければならない．そのため，この正則化ではバリオン数とレプトン数が異常な対称性となる．

レプトン数のカレントとバリオン数のカレントは，

$$\begin{aligned} J^{L\mu} &= \bar{l}_L\gamma^\mu l_L + \bar{e}_R\gamma^\mu e_R, \\ J^{B\mu} &= \bar{u}\gamma^\mu u + \bar{d}\gamma^\mu d \end{aligned} \tag{13.43}$$

で定義できる．有効作用がこれらの対称性に対応する変換のもとで不変でないことは，次の保存則（の破れ）で表すことができる．

$$\partial_\mu J^{L\mu} = \partial_\mu J^{B\mu} = c_2[b] - 2c_2[c]. \tag{13.44}$$

（式 (13.41) で α, β を大域的な対称性であるにも関わらず x の関数として表したのは，この恒等式の導出を容易にするためである．）$c_2[b]$ あるいは $c_2[c]$ の積分がゼロでないような場の配位があれば，標準模型においてバリオン数（およびレプトン数）の破れが起きることが (13.44) から直接わかる．$SU(2)$ ゲージ場の b_μ にはそのような配位が存在し，弱い相互作用のインスタントンがその例である．

グルーオン場はこれらのアノマリーには寄与しないが，QCD の軸性 $U(1)$ アノマリーには寄与する．軸性 $U(1)$ 変換は

$$Q'_L = e^{i\lambda} Q_L\,, \qquad Q'_R = e^{-i\lambda} Q_R,$$
$$Q' = e^{i\lambda\gamma^5} Q \tag{13.45}$$

で与えられる．これは，たとえアノマリーがなくても，クォークの質量およびその他の弱い相互作用の効果のために理論の完全な対称性とはならない．しかしながら，この対称性が最も強く破れるのはアノマリーのためであり，したがってこれを書き下すことは重要である．この場合，計算は (13.22) を一般化するだけであり，

$$\begin{aligned}\delta_\lambda \Gamma &= -i\,2N_f \int d^4x\ \lambda\, \frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}) \\ &= i\,2N_f \int d^4x\ \lambda\, \rho[A],\end{aligned} \tag{13.46}$$
$$\rho[A] = -\frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta})$$

を得る．ここで，A は $SU(3)$ ゲージ場で QCD のゲージ場に対応する．N_f は軽いフェルミオンのフレーバー数である．(重いフェルミオンのフレーバーについては，フェルミオン質量項による軸性対称性の破れが強くなるため，アノマリーの寄与だけを分離して考えるのは有用でない.）$\rho[A]$ はインスタントン数の密度である．つまり，$\rho[A]$ の積分はインスタントン数を与え，整数となる．作用が $\lambda = 2\pi n/(2N_f)$（n は整数）だけ変化すると，$\Delta\Gamma = 2\pi i n$ となるので，$\exp(-\Gamma)$ は不変である．よって，$U_A(1)$ 対称性はアノマリーで破れるが，Z_{2N_f} 対称性はすべての物理結果で保存される．

13.5 π^0 中間子崩壊のラグランジアン

7 章で π^0 中間子の寿命を計算したときに，次の有効ラグランジアンをもちいた．

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{\alpha}{\pi f_\pi} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\,\pi^0. \tag{13.47}$$

(7 章では，π 中間子の場を ϕ で表したが，ここでは 12 章に従い π^0 とする.)

場 π^0 は標準模型におけるカイラル対称性の自発的な破れで生じる南部–ゴールドストン・ボソンとして理解できる．このことと軸性アノマリーの計算からラグランジアン (13.47) を以下のように導出することができる．

π 中間子はアップクォークとダウンクォークのみで構成されるので，以下の計算では，クォークのフレーバーは 2 つだけとする．まず，カイラル変換

$$u \to \exp(i\gamma_5\varphi)\, u, \qquad d \to \exp(-i\gamma_5\varphi)\, d \tag{13.48}$$

を考えよう．これは

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \to \exp(i\gamma_5\tau_3\varphi)\, q \tag{13.49}$$

と表せる．擬スカラー中間子を表す場 U は，$q_L\bar{q}_R$ のように振る舞い，カイラル変換のもとで，

$$U \to U' = g_L\, U\, g_R^\dagger \tag{13.50}$$

と変換する．これらを U の中間子場による展開式 (12.90), (12.91) と比較すると，クォークが (13.48) のように変換するとき，中間子は

$$\pi^0 \to \pi^0 + 2f_\pi\varphi \tag{13.51}$$

と変化することがわかる．アップ・ダウンクォークはそれぞれ $\frac{2}{3}e$, $-\frac{1}{3}e$ の電荷をもち，各々3 つのカラーが電磁場とのアノマリーの項に寄与する．これらを考慮すると，(13.22) から

$$\begin{aligned}
\delta_\varphi \Gamma &= -i\frac{e^2}{8\pi^2}\int d^4x\ \varphi F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \times 3 \\
&= -i\frac{\alpha}{2\pi}\int d^4x\ \frac{\delta\pi^0}{2f_\pi} F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{13.52}$$

となることがわかる．これを積分すると，有効相互作用項

$$\begin{aligned}
\Gamma &= -i\frac{\alpha}{4\pi f_\pi}\int d^4x\ \pi^0 F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \\
&= -i\frac{\alpha}{\pi f_\pi}\int d^4x\ \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\,\pi^0
\end{aligned} \tag{13.53}$$

が得られる．この計算はユークリッド空間で行った．よって，$\exp(-\Gamma)$ をミ

ンコフスキー空間に解析接続すると $\exp\left(i\int\mathcal{L}_{int}\right)$ となり，$\mathcal{L}_{int}$ は (13.47) で与えられることがわかる．

13.6 軸性 $U(1)$ 問題

すでに議論したように，軽いクォークの 3 フレーバーによる近似的なカイラル対称性 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ はグルーオン場の非摂動的な効果により自発的に破れる．もしカイラル対称性がラグランジアンの完全な対称性を与えるとすると，この自発的な破れは無質量の南部–ゴールドストン・ボソンを導く．しかし，そもそも出発点となるラグランジアンは，質量や弱い相互作用などの効果のため，このカイラル対称性を十分に保っていない．そのため，潜在的な南部–ゴールドストン・ボソンは質量を獲得する．ただし，この質量は強い相互作用のスケールと比較すれば小さいままである．つまり，これらは擬南部–ゴールドストン・ボソンである．(12.91), (12.96) で与えた有効ラグランジアンは中間子のこういった特徴をとらえている．しかし，これに関して難点が 1 つ存在し，その解決には軸性 $U(1)$ アノマリーが必要となる．この問題は，$U_A(1)$ 問題と呼ばれる．$U(3)_L \times U(3)_R$ は $U(3)_V$ へ破れるので，9 個の南部–ゴールドストン・ボソンが期待される．$U_A(1)$ 生成子に対応する中間子の候補は η' 中間子で，その質量はおよそ 958 MeV である．この値は擬スカラー中間子の 8 重項（オクテット）の質量よりも著しく大きい．これを解釈するのは確かに困難であるが，これらの中間子はすべて始めの対称性が不完全であるために質量を獲得するのであるから，理論的には破綻していない．実際には，**クォークの質量を与えることで** η' の質量を計算することができ，その結果 $m_{\eta'} \leq \sqrt{3}\, m_\pi$ となることが知られている．この不等式は，現実世界では著しく破れており，これが $U_A(1)$ 問題である．明らかに，軸性 $U(1)$ 対称性の破れがクォーク質量のスケールよりも小さいと仮定することに何か間違いがあると考えられる．

$U_A(1)$ 対称性のアノマリーがその問題を解決する．古典的なラグランジアンにそのような対称性があったとしても，グルーオン場により，強い相互作用のスケールではその対称性は破れる．したがって，η' を擬南部–ゴールド

ストン・ボソンとして解釈することは実際にはできない．軸性 $U(1)$ 変換のもとで，中間子の場 U は $U \to \exp(2i\varphi)U$ と変換する．よって，(13.46) で与えられた作用の変分から，中間子レベルでの有効作用は次の項

$$
\begin{aligned}
S_{eff} &= \frac{i}{2}\left(\log\det U - \log\det U^\dagger\right)\left(\frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2N_f}}{f_\pi}\,\eta'\,\rho[A,x]
\end{aligned}
\tag{13.54}
$$

を含むことがわかる．(ただし，ここではミンコフスキー空間をもちいた.) インスタントン密度 $\rho[A]$ の 2 点関数が

$$
\langle\rho(x)\rho(y)\rangle = m_0^4\delta^{(4)}(x-y) + \mathcal{O}(\partial) \tag{13.55}
$$

の形で書けるとすると，η' の質量項は

$$
S_{\eta'\,mass} = \frac{1}{2}\left[\frac{2N_f m_0^4}{f_\pi^2}\right]\eta'^2 \tag{13.56}
$$

となる．これは η' へのアノマリーによる追加質量であり，$U_A(1)$ 問題への解を与える．η' 質量についてのこの公式はベネチアーノ–ウィッテン (Veneziano–Witten) 公式と呼ばれる．ここでの 2 点関数は，格子 QCD など QCD への非摂動的な手法をもちいて評価できる．(簡単のため，ここでは中間子の波動関数の混合を無視した.)

この解析についてもう 1 つ興味深い点がある．軸性カレント保存則の異常は

$$
\partial_\mu J_A^\mu = 2N_f\,\frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \tag{13.57}
$$

で与えられる．この右辺は実は全微分項となり，$-2N_f\partial_\mu K^\mu$ と書ける．ただし，

$$
K^\mu = -\frac{1}{8\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\mu A_\alpha A_\beta\right) \tag{13.58}
$$

である．したがって，保存カレント $J_A^\mu + 2N_f K^\mu$ が実際には存在する．これは南部–ゴールドストン・ボソンがあるべきだという議論に逆戻りしているようである．しかし，K^μ はゲージ不変ではない．もちろん，この議論で実際に問題となるのは，電荷 $\int d^3x\ K^0$ がゲージ不変であるかどうかである．(K^0 は 10 章で扱ったチャーン–サイモンズ項であることに注意しよう.) ゲージ変

換のもとで K^0 は

$$K^0(A^g) - K^0(A) = -\frac{1}{8\pi^2}\epsilon^{ijk}\partial_i \operatorname{Tr}(g^{-1}\partial_j g\, A_k) - \frac{1}{24\pi^2}\epsilon^{ijk}\operatorname{Tr}(g^{-1}\partial_i g\, g^{-1}\partial_j g\, g^{-1}\partial_k g) \qquad (13.59)$$

と変換する．右辺第 1 項は全微分項であるので，電荷には寄与しない．したがって，第 2 項が寄与しなければ，$\int K^0$ はゲージ不変となり南部–ゴールドストン・ボソンが導かれる．アーベル型ゲージ理論の場合，第 2 項はゼロとなる．よって，アーベル型ゲージ場による $U_A(1)$ アノマリーは $U_A(1)$ 問題を解決しない．非アーベル型ゲージ場では第 2 項の積分がゼロとならないゲージ変換が存在する．これは，後に議論するように変換の巻き数 (winding number) に相当する．さらに，第 2 項の積分がゼロとなる変換だけに限定して理論を考えることはできない．なぜなら，そのような変換だけではある種の場の配位，特にインスタントンの配位を非特異 (nonsingular) に記述できないからである．したがって，非アーベル型対称性とそれに付随するインスタントン配位がある場合，$U_A(1)$ 問題は確かに解決できる．

参考文献

1. 一般的な文献として R.A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Clarendon Press (1996) がある．また非常に有用なリプリント集として S.B. Treiman *et al.*, *Current Algebra and Anomalies*, Princeton University Press (1986) がある．

2. 量子異常は π^0 中間子の崩壊過程の計算 J. Steinberger, Phys. Rev. **76**, 1180 (1949); H. Fukuda and Y. Miyamoto, Prog. Theor. Phys. **4**, 347 (1949) に現れている．これはまた，シュウィンガーの素晴らしい論文 J. Schwinger, "On gauge invariance and vacuum polarization," Phys. Rev. **82**, 664 (1951) にも現れている．しかし，古典対称性の量子的な破れとしての量子異常の本当の理解は S. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969); J. Bell and R. Jackiw, Nuov. Cim. **60A**, 47 (1969) に始まる．

3. WZ 整合性条件は J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. **B37**, 95 (1971) で与えられた．

4. 量子異常の非繰り込み定理は S. Adler and W.A. Bardeen, Phys. Rev. **182**, 1517 (1969) による．繰り込み群をもちいた簡単な証明は S.S. Shei and A. Zee, Phys. Rev. **D8**, 597 (1973) で与えられている．

5. 量子異常のバーディーンの式は W.A. Bardeen, Phys. Rev. **184**, 1848 (1969)

による．WZ の整合性の式から共変なバーディーンの式を導くカウンター項は論文 W.A. Bardeen and B. Zumino, Nucl. Phys. **B244**, 421 (1984); M. Paranjape, Phys. Lett. **B 156**, 376 (1985) で議論された．

6. $U_A(1)$ 問題は S.L. Glashow, in *Hadrons and Their Interactions*, A. Zichichi (ed.) Academic Press (1967) で初めて指摘された．$m_{\eta'} \leq \sqrt{3} m_\pi$ の関係式は S. Weinberg, Phys. Rev. **D11**, 3583 (1975) による．問題解決のためのインスタントンの役割は G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976) で指摘された．η' の質量公式は E. Witten, Nucl. Phys. **B156**, 269 (1979); G. Veneziano, Nucl. Phys. **B159**, 213 (1979); Phys. Lett. **B95**, 90 (1980) による．本章での有効ラグランジアンの手法は C. Rosenzweig, J. Schechter and C.G. Trahern, Phys. Rev. **D21**, 3388 (1980) に従った．

第 14 章

微分幾何学入門

14.1　多様体，ベクトル場，微分形式

この章では，微分幾何学の概念について初歩的な入門を行う．ここでは，考え方と実際の計算に重点を置くことにする．正確な定義や厳密な定式化については，多くの数学の教科書で扱われているので，それらを参照されたい．

本章では，開集合，トポロジー（位相幾何学），位相空間，連続性，微分可能性，同相写像 (homeomrphism) についての基本的事項を仮定する．また，$\mathbf{R}^n$ 上の解析学についてのある程度の知識を仮定して議論を進める．

位相多様体

n 次元の位相多様体 $\mathcal{M}$ は，すべての点 $p \in \mathcal{M}$ が $\mathbf{R}^n$ 上の開ディスクと同相な近傍をもつ位相空間である．

同相写像は連続で，1 対 1（よって，可逆な）写像である．上の定義は，$\mathcal{M} = \bigcup_i U_i$ となるような開集合 U_i を考えることができることを意味する．ここで，集合 $\{U_i\}$ は M の開被覆 (open cover) を成す．このとき，写像

$$\varphi_U : U \to D^n$$

（D^n は $\mathbf{R}^n$ にある開ディスク）は $\mathcal{M}$ の局所座標を与える．写像 φ_U で与えられた D^n の点に対応する実数が局所座標となる．φ^{-1} が存在し，これは連続的である．このような写像 φ はチャート (chart) と呼ばれる．

$\mathcal{M}$ の開集合 U, V ($U \cap V \neq \emptyset$) を考えよう．このとき，$\varphi_U : U \to D^n$,

$\varphi_V : V \to D^n$ となる．U と V の交わりでは，座標を2つ選ぶことができる．1つの座標，例えば φ_V で与えられる座標から φ_U で与えられる別の座標への変換を，関数 $\varphi_U \varphi_V^{-1}$ をもちいて構成できる．これは推移関数 (transition function) と呼ばれ，連続関数である．

多様体が微分可能であるとは，すべての推移関数が C^∞ であることを意味する．このとき，推移関数に関して任意の階数の微分が問題なく定義できる．$\mathbf{R}^n$ や n 次元球面 S^n など，物理で通常もちいられる多様体はほとんどの場合，微分可能な多様体である．多様体の座標として，異なるチャートを選ぶことができる．ある座標から別の座標への写像は，座標変換を与える．また，$\mathcal{M}$ 上の C^∞ 変換は，微分同相写像 (diffeomorphism) と呼ばれる．

1次元球面 S^1（円周）は，最も単純な微分可能多様体の1つであり，これらの概念についての簡単な具体例を与える．この場合には，実数である角度 θ を局所座標として使える．しかし，S^1 を1つのチャートで覆えないことはすぐにわかる．$\theta = 0$ と $\theta = 2\pi$ は，多様体 S^1 上の同じ点に対応する．$\mathbf{R}^1$ の1つの近傍への1対1写像が必要なので，これは認められない．そこで S^1 を正しく座標表示するには少なくとも2つのチャートを使わなければならない．

$\mathcal{M}$ 上のベクトル場

つぎに，$\mathcal{M}$ 上の曲線を考えよう．これは写像 $U_t : t \in [0,1] \to \mathcal{M}$ で与えられる．間隔 $[0,1]$ の写像は $\mathcal{M}$ 上の曲線で，その始点 $p \in \mathcal{M}$ は $t = 0$ の値に対応する．以下では，この曲線を $U_t(p)$ $(U_0(p) = p)$ と表示しよう．

$\mathcal{M}$ 上の微分可能な関数全体を $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ とする．つまり，$f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ であるとき，$f : \mathcal{M} \to \mathbf{R}^1$ となり，f は C^∞ である．曲線 $U_t(p)$ 上の点 p に関するベクトル X を

$$(X \cdot f)(p) \equiv \frac{d}{dt} f(U_t(p)) \bigg]_{t=0} \tag{14.1}$$

と定義できる．X は曲線 $U_t(p)$ 上の点 p における接ベクトルである．p を始点として曲線全体を考えると，p におけるベクトル空間が得られる．これは接空間 $T_p\mathcal{M}$ であり，X は $\mathcal{M}$ 上の点 p における接空間の要素である．多様体の異なる点を始点とした曲線の集合を考えると，$\mathcal{M}$ 上のすべての点で定義されたベクトル場が得られる．これは，各点の接空間をすべて合わせたもの

と等しく，$T\mathcal{M} = \bigcup_p T_p\mathcal{M}$ となる．これは $\mathcal{M}$ の接束 (tangent bundle) と呼ばれる．よって，ベクトル場は各 p において $T_p\mathcal{M}$ の要素を選ぶことで得られる．

(14.1) から，ベクトル場 X は，$f \to X \cdot f$ で与えられる写像 $\mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathcal{F}(\mathcal{M})$ であるとみなすこともできる．局所座標をもちいると，$U_t(p) = x^i + t\xi^i(x) + \cdots$ と表すことができる．ただし，x^i は点 p の座標である．(局所座標をもちいているので，正確にはこれは $\varphi(U_t(p))$ のことである．ただ，混乱がない限り，チャートがどの座標系によるのかを明示せずに局所座標を表すことにする.）上の表式から，

$$X \cdot f(x) = \frac{d}{dt} f(x^i + t\xi^i + \cdots)\bigg]_{t=0} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} f \tag{14.2}$$

となる．したがって，ベクトル場は局所座標をもちいて

$$X = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{14.3}$$

で与えられる．$\partial/\partial x^i$ はベクトル場の 1 つの基底を与え，ξ^i はこの基底における X の成分である．この基底は通常，座標基底と呼ばれる．また，ξ^i は共変ベクトルと呼ばれるものである．ここで与えたベクトルの定義は，どの座標を使うかにはよらず，完全に幾何学的な定義である．

曲線 $U_t(p)$ が与えられると，これまでと同じように，その始点でベクトル場を定義することができる．では自然な問いとして，ベクトル場 ξ^i が与えられると曲線 $U_t(p)$ は決まるのだろうか？ 局所的には，この答えはイエスである．これはフロベニウスの定理として知られている．微分方程式

$$\frac{dx^i}{dt} = \xi^i(x) \tag{14.4}$$

は，$x^i(t)\big]_{t=0}$ が点 p を表すという初期条件のもとで，少なくとも局所的には解をもつ．このようにして定義された解の軌跡はベクトル場 X の積分曲線である．

$\mathcal{M}$ 上の微分 1-形式

$T_p\mathcal{M}$ はベクトル空間なので，その双対ベクトル空間 $T_p^*\mathcal{M}$ を定義することができる．双対空間の基底を局所座標をもちいて dx^i と表し，これを関係式

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j\right) = \delta_i^j \tag{14.5}$$

で定義する.（この括弧により 2 つのベクトル空間の基底ベクトルを対応させる規則が与えられる.）これは dx^j と $\partial/\partial x^i$ の内積 (interior contraction) と呼ばれる. $T_p^*\mathcal{M}$ は点 p での余接空間と呼ばれる. このような空間の和集合は, 余接束 (cotangent bundle) $T^*\mathcal{M}$ を与える. すると微分 1-形式を, 多様体の各点においてこの双対ベクトル空間の要素を与えることで定義できる. dx^i を基底とすると, 双対ベクトルは $\omega = \omega_i dx^i$ の形で書け, $\omega_i(x)$ は各チャート U 上で微分可能な関数となる. これとベクトル場 $X = \xi^i\partial/\partial x^i$ との内積をとると,

$$i_X\omega = \left(\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \omega_j dx^j\right) = \xi^i\omega_i \tag{14.6}$$

となる. これがすべてのベクトル場 X について多様体 $\mathcal{M}$ 上で大域的に定義された関数（つまり $i_X\omega \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$）であることを要請すると, 余接空間の要素についての固有の概念を定義することができる.

微分 1-形式の成分（つまり $\omega = \omega_i dx^i$ と書いたときの ω_i）は共変ベクトルである.

座標不変性

集合 x^i から x の関数で指定される別の集合 y^i への座標変換を考えよう. 関数 $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ に対して, y を x の関数として $f(y)$ に代入すると x の関数が得られる. つまり, $f(x) = f(y)]_{y=y(x)}$ となる. これより,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}f(y) = \frac{\partial f}{\partial y^j}\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right) \tag{14.7}$$

を得る. ベクトル場と 1-形式は座標不変な形で定義される. よって,

$$\begin{aligned} X &= \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} = \tilde{\xi}^j(y)\frac{\partial}{\partial y^j}, \\ \omega &= \omega_i(x)dx^i = \tilde{\omega}_j(y)dy^j \end{aligned} \tag{14.8}$$

となる. これは成分がどのように変換するかを示している. (14.7) をもちいると, ベクトル場について

$$X = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^i(x)\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$\equiv \tilde{\xi}^j(y)\frac{\partial}{\partial y^j} \tag{14.9}$$

となることがわかる．これより，

$$\tilde{\xi}^j(y) = \xi^i(x)\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right) \tag{14.10}$$

がわかる．同様に

$$\tilde{\omega}_j(y) = \omega_i(x)\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) \tag{14.11}$$

となる．ここでは，ベクトル場と 1-形式は幾何学的に同じ点で評価されていることに注意しよう．つまり，上の計算では点を記述する座標系だけが変化したことになる．

微分 k-形式

$T_p\mathcal{M}$ から始めて k 階のテンソル積をとると，$(T_p\mathcal{M})^k$ を得る．この空間の要素は，点 p におけるランク k のテンソルを定義する．多様体の全体にわたってそのようなテンソルを集めると，ランク k のテンソル場を定義できる．同様に，余接空間のテンソル積をとると，双対テンソルを定義できる．

微分幾何学では，特別な役割をもつ双対テンソルがあり，これらは $T^*\mathcal{M}$ の反対称化されたテンソル積で与えられる．微分 k-形式は，多様体のすべての点でこの反対称化された積 $\wedge_k(T_p^*\mathcal{M})$ を考えたとき，その要素で与えられる.（ウェッジ記号 $\wedge$ は反対称化されたテンソル積を表す.）局所座標をもちいると，k-形式 ω は

$$\omega = \frac{1}{k!}\omega_{i_1 i_2 \cdots i_k}\ dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \tag{14.12}$$

で与えられる．ここで，成分 $\omega_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ は k 個の添え字について反対称である．

ウェッジ積（反対称化された積）を使って，微分形式の外積を定義することもできる．α を k-形式，β を p-形式とすると，これらの積 $\alpha\wedge\beta$ は $(k+p)$-形式となり，これは局所座標をもちいて

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{k!}\alpha_{i_1\cdots i_k}\ dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k},\\ \beta &= \frac{1}{p!}\beta_{i_1\cdots i_p}\ dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p},\end{aligned} \tag{14.13}$$

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{k!}\frac{1}{p!}\alpha_{[i_1\cdots i_k}\beta_{i_{k+1}\cdots i_{k+p}]}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k+p}}$$

と表される．ただし，角括弧は添え字の反対称化を示す．

反対称化のため，$k > n$ のとき，n 次元多様体上の k-形式はすべてゼロとなる．したがって，n 次元多様体において次数が最大の微分形式は n-形式である．

k-形式の引き戻し

多様体 $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への写像 $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ を考えよう．x を $\mathcal{M}$ 上の座標とすると，$\varphi(x)$ は写像 φ のもとでの $\mathcal{M}$ の像の座標である．ω を N 上で定義された微分 k-形式とし，$\mathcal{N}$ 上の局所座標 y で

$$\omega = \frac{1}{k!}\omega_{i_1 i_2\cdots i_k}(y)\, dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} \tag{14.14}$$

と表す．つぎに，写像 φ の像における ω を考えると，これは $\mathcal{M}$ 上の k-形式とみなせることが次のようにわかる．y を写像 $\varphi(x)$ で置き換えると

$$\begin{aligned}\varphi^*\omega &= \frac{1}{k!}\omega_{i_1 i_2\cdots i_k}(\varphi(x))\, d\varphi(x)^{i_1} \wedge d\varphi(x)^{i_2} \wedge \cdots \wedge d\varphi(x)^{i_k}\\ &= \frac{1}{k!}\omega_{i_1 i_2\cdots i_k}(\varphi(x)) \left(\frac{\partial \varphi^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial \varphi^{i_k}}{\partial x^{j_k}}\right) dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}\end{aligned} \tag{14.15}$$

となる．ただし，$\varphi^*\omega$ は $\mathcal{M}$ 上の微分 k-形式である．これは $\mathcal{N}$ 上の k-形式 ω の写像 φ による引き戻しと呼ばれる．

外微分

d と表記される外微分は，微分形式に作用する微分演算子で，k-形式を $(k+1)$-形式にする．局所座標をもちいて，

$$\begin{aligned}d\omega &= \frac{1}{k!}\frac{\partial \omega_{i_1 i_2\cdots i_k}}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\\ &= \frac{1}{(k+1)!}\omega_{i_1 i_2\cdots i_k i_{k+1}}\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{i_{k+1}},\end{aligned}$$

$$\omega_{i_1 i_2\cdots i_k i_{k+1}} = \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\omega_{i_2 i_3\cdots i_{k+1}} - \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\omega_{i_1 i_3\cdots i_{k+1}} + \cdots$$

$$+(-1)^k \frac{\partial}{\partial x^{i_{k+1}}} \omega_{i_1 i_2 \cdots i_k} \tag{14.16}$$

と表される．0-形式（つまり，関数）および 1-形式に作用すると，これは

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i, \\ d\omega &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^i \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_i \omega_j - \partial_j \omega_i\right) dx^i \wedge dx^j \end{aligned} \tag{14.17}$$

となる．これより，外微分はなじみ深いベクトルの回転 (curl) の一般化であることがわかる．

外微分の 2 つの重要な性質は

$$\begin{aligned} d^2 &= 0, \\ d(\alpha \wedge \beta) &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta \end{aligned} \tag{14.18}$$

である．ただし，α は k-形式である．特異性のない量に作用すると $\partial_i\partial_j - \partial_j\partial_i = 0$ であるので，最初の式は明らかである[1]．また，次の式もウェッジ積の反対称性から簡単に確認できる．

外微分を定義する際の反対称化が座標不変性あるいは $\mathcal{M}$ の微分同相写像のもとでの不変性を得るのにいかに重要であるかを見てみよう．局所座標をもちいて $\omega = \omega_i dx^i = \tilde{\omega}_j dy^j$ と書ける 1-形式 ω を考えよう．このとき外微分は

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\ dx^j \wedge dx^i \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\tilde{\omega}_i \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right) dx^j \wedge dx^k \\ &= \left[\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial y^m}\frac{\partial y^m}{\partial x^j}\frac{\partial y^i}{\partial x^k} + \tilde{\omega}_i \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k}\right] dx^j \wedge dx^k \\ &= \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial y^k}\ dy^k \wedge dy^i \end{aligned} \tag{14.19}$$

と書ける．外微分の形は y 座標，x 座標でも同じであることがわかる．この不変性が可能となるのは，j, k の反対称性により，上の表式で y^i の 2 階微分

---

[1] ［訳註］角度変数のような一価でない量に作用すると，原点でディラックの δ 関数に比例してゼロでない値を与える．

に関する項が相殺するためである．これは外微分の定義において反対称化が重要であることを示している．

微分形式の積分

微分形式が重要であることの理由の 1 つに，適当な次元の部分多様体で積分できる点がある．n 次元多様体上の n-形式を考えよう．dx の積は

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} = \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n}\ d^n x \tag{14.20}$$

と表せる．$\epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n}$ はレビ-チビタ記号であり，2 つの添え字の交換のもとで反対称である．これは 2 つの添え字が同じ値のときゼロとなる．また，$\epsilon^{12\cdots n} = 1$ である．$i_1 i_2 \cdots i_n$ が $12 \cdots n$ の置換 P である場合，P が偶置換のとき $\epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n}$ は 1 であり，P が奇置換のとき -1 である．(14.20) で $d^n x$ は，n 個の実変数 $x^1, x^2, \ldots, x^n$ による通常の積分測度である．

ω が n-形式であるとすると，局所的には

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{n!}\omega_{i_1 i_2 \cdots i_n}\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \\ &= \frac{1}{n!}\omega_{i_1 i_2 \cdots i_n}\ \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n}\ d^n x \\ &= \rho(x)\, d^n x\end{aligned} \tag{14.21}$$

と書ける．これは関数 ρ と積分測度 $d^n x$ で表される．この積分測度は，いま考えている $\mathcal{M}$ の近傍である領域 $\mathbf{R}^n$ についてのものである．したがって，n 個の実変数についての標準的な多重積分をもちいて，これを積分することができる．これを $\mathcal{M}$ のそれぞれの近傍に対して行うと，$\mathcal{M}$ 全体で n-形式 ω の積分を求めることができる．さまざまな近傍における値の和をとる際に，推移関数をもちいる必要があるが，これは座標変換と同じである．あるパッチ (patch) で座標 x，その近傍のパッチで座標 y をもちいると仮定しよう．これらが交わった領域では，

$$\begin{aligned}dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} &= \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial y^{j_n}}\ dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_n} \\ &= \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial y^{j_n}} \epsilon^{j_1 \cdots j_n}\ d^n y\end{aligned}$$

$$= \det\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\right) dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_n}$$
$$= J\, dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_n} \tag{14.22}$$

となる．J は変換のヤコビアンである．$\omega_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ はヤコビアンの逆関数によって変換するので，ω の値は座標によらず同じである．よって，積分を $\mathcal{M}$ 全体に拡張することができる．

この積分には難点が 1 つある．2 つの座標パッチが交わる領域で $\rho(x) = 1$ となる n-形式の積分を考えよう．この領域での積分は x 座標と y 座標のどちらを使ってもよい．このとき，座標体積は x で測られるか，あるいはこの領域における $J d^n y$ の積分で与えられる．ヤコビアンが正でない場合，この積分領域の体積の計算に矛盾が生じる．変換のヤコビアンを正に選ぶことのできる多様体は，向き付け可能な多様体であると呼ばれる．以下ではこの向き付け可能な多様体について考えよう．

k-形式があると，これを k 次元の部分空間あるいは部分多様体上で積分できる．部分多様体上のそれぞれの近傍は，逆写像によって，$\mathbf{R}^k$ の領域に写像される．k-形式を部分多様体上に制限することによって，$\mathbf{R}^k$ の領域に引き戻され，実変数についての積分として k-形式を積分できる．

微分形式の外積代数

次数の同じ微分形式は和をとることができ，同じ次数の微分形式となる．同様に，実係数をもちいて任意の線形結合をとることができる．(一般に，係数の体は実数に限らないが，以下の議論では実数のみを考えよう．)

2 つの微分形式のウェッジ積は，再び微分形式となる．また，k-形式の外微分は $(k+1)$-形式を与える．これらの演算のもとで，多様体上の微分形式は閉じた代数を成す．これは，$\mathcal{M}$ の外積代数として知られている．

微分形式と外積（あるいはウェッジ積）の代数，および外微分は多様体 $\mathcal{M}$ 上の解析において特別な意味をもつ．すでに見たように，k-形式は k 次元の部分空間上で自然に積分できる．これは，微分形式が重要であることの 1 つの理由である．また，微分の反対称化によって座標に依存しない微分を定義できることを見た．重要な点は，計量の概念あるいは多様体 $\mathcal{M}$ についての付加的な構造がこれまで一切導入されていない点である．微分形式と外微分

はそのような構造に依存しない．したがって，これらは多様体のトポロジカルな性質を表すのに非常に有用である．

完全形式と閉形式

$d\omega = 0$ のとき，ω は閉じていると呼ばれる．また $\omega = d\alpha$ のとき，ω は完全であると呼ばれる．明らかに，完全な形式は閉じた形式を意味する．これは，$d^2 = 0$ なので，$\omega = d\alpha \Rightarrow d\omega = d^2\alpha = 0$ となることからわかる．一般に，この逆は真ではない．ポアンカレの補題は，すべての閉形式は局所的には完全であることを述べている．言い換えると，もし $d\omega = 0$ であれば，局所領域においては，ある α をもちいて $\omega = d\alpha$ と書ける．一般に，これは大域的には成り立たない．

例えば，角度 θ を座標としてもつ $\mathcal{M} = S^1$ 上の 1-形式 $d\theta$ は明らかに閉じているが，これは完全ではない．なぜなら，これは 0-形式 θ の微分であるが，この 0-形式は以前に議論した一価性の問題のため，大域的に定義されていないからである．θ は局所的な近傍では問題なく定義されているので，これはポアンカレの補題の一例を与える．対照的に，1-形式 $\sin\theta\, d\theta$ を考えると，これは閉形式であり，$\sin\theta\, d\theta = d(-\cos\theta)$ と書けるが，$\cos\theta$ は S^1 上で問題なく定義されるので，$\sin\theta\, d\theta$ は完全形式でもある．

もう 1 つの例として，$\mathcal{M} = S^2$ 上の極座標で表された 2-形式 $\sin\theta\ d\theta \wedge d\varphi$ を考えると，これも閉じているが完全ではないことがわかる．

ストークスの定理

ω を k-形式とし，C を $\mathcal{M}$ の $(k+1)$ 次元部分空間とすると，

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega \tag{14.23}$$

が成り立つ．∂C は C の境界である．この結果は 3 次元ベクトル解析におけるストークスの定理の一般化である．よって，その証明は通常のストークスの定理と同様に行える．C が閉多様体つまり境界のない多様体である場合，$\int_C d\omega = 0$ となる．

ストークスの定理は微分形式の計算にとても有用である．この定理をもちいてある微分形式が完全でないことを証明できる場合もある．例えば，$\mathcal{M} = S^2$

上の $\omega = \sin\theta \; d\theta \wedge d\varphi$ を考えよう．積分を直接評価すると

$$\int_{S^2} \omega = 4\pi \tag{14.24}$$

となる．$d\theta \wedge d\theta = 0$ なので，ω は明らかに閉じている．もしこれが完全であり，例えば $\omega = d\alpha$ と書けるとすると，

$$\int_{S^2} \omega = \int_{\partial S^2} \alpha = 0 \tag{14.25}$$

と表すことができる．なぜなら S^2 は境界を持たないからである．したがって，前の結果 (14.24) は ω が完全とならないことを示している．よって，$\omega = \sin\theta \; d\theta \wedge d\varphi$ は閉じているが，完全ではない S^2 上の 2-形式である．

体積形式とホッジ双対

計量あるいは距離関数が $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ であるリーマン多様体 $\mathcal{M}$ を考えよう．この空間の体積要素は，その座標をもちいて $\sqrt{\det g}\; d^n x$ で与えられる．これは $\mathcal{M}$ 上の n 形式 V で表すことができ，体積形式と呼ばれる．明示的に書き下すと，

$$V = \frac{1}{n!} \sqrt{\det g}\, \epsilon_{i_1 \cdots i_n} \; dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \tag{14.26}$$

となる．$\epsilon_{i_1 \cdots i_n}$ は以前と同じく，純粋に数値的なレビ-チビタ記号である．

ω を n 次元多様体 $\mathcal{M}$ 上の k-形式とすると，体積形式をもちいてこれに関連した $(n-k)$-形式を定義することができる．これは ω のホッジ双対 (Hodge dual) と呼ばれ，${}^*\omega$ で表される．ω とその局所成分 $\omega_{j_1 \cdots j_k}$ が与えられると，これに関連した共変テンソルを計量をもちいて次のように定義できる．

$$\begin{aligned} T_\omega &= \frac{1}{k!} \omega^{i_1 \cdots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \\ &= \frac{1}{k!} g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} \omega_{j_1 \cdots j_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}. \end{aligned} \tag{14.27}$$

ここで，g^{ij} は計量の逆関数であり，$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$ で定義される．$\partial/\partial x$ の添え字の順序を反対にしたことに注意しよう．（これによって，不必要なマイナス符号を避けることができる.）このテンソルと体積形式の縮約が $(n-k)$-形式 ${}^*\omega$ を与える．局所座標をもちいると，

$${}^*\omega \equiv (T_\omega \,,\, V)$$

$$= \frac{1}{(n-k)!}\left[\frac{1}{k!}\sqrt{\det g}\,\epsilon_{i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_n}\, g^{j_1 i_1}\cdots g^{j_k i_k}\omega_{j_1\cdots j_k}\right]$$
$$\times\ dx^{i_{k+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_n} \tag{14.28}$$

となる．この定義から，ユークリッド計量をもちいて $^*(^*\omega) = (-1)^{k(n-k)}\,\omega$ となることがすぐに確認できる．($\det g$ が負となるミンコフスキー計量をもちいると，$^*(^*\omega) = -(-1)^{k(n-k)}\,\omega$ が得られる．)

ホッジ双対の定義は計量に依存する．つまり，ホッジ双対は計量と独立した量ではない．

ホッジ双対はまた多様体上の微分形式に対する内積の概念を与える．α と β をユークリッド計量をもつ $\mathcal{M}$ 上の 2 つの異なる k-形式であるとしよう．すると，これらの内積は

$$\begin{aligned}(\alpha\,,\,\beta) &= \int_{\mathcal{M}}\alpha\wedge{}^*\beta \\ &= \frac{1}{k!}\int_{\mathcal{M}}\sqrt{\det g}\,\alpha_{i_1\cdots i_k}\beta_{j_1\cdots j_k}\;g^{i_1 j_1}\cdots g^{i_k j_k} \\ &= (\beta\,,\,\alpha)\end{aligned} \tag{14.29}$$

で定義できる．この内積をもちいて，外微分の随伴演算子 δ を関係式

$$(\alpha, d\gamma) = (\delta\alpha, \gamma) \tag{14.30}$$

で定義することができる．ここで，α は k-形式，γ は $(k-1)$-形式である．演算子 δ は内積 (14.29) が有限となる微分形式にのみ定義される．これは有限体積をもつコンパクト多様体の場合に当てはまる．また，無限体積をもつ多様体であっても，適切な制限を課した微分形式をもちいれば問題はない．(14.30) から明らかなように，d は k-形式から $(k+1)$-形式への写像を与える一方，δ は k-形式から $(k-1)$-形式への写像を与える．ホッジ双対の定義をもちいると，$\delta = (-1)^{nk+n+1}\,{}^*d^*$ となることがわかる．局所座標で表すと

$$\delta\alpha = -\frac{1}{(k-1)!}\,\partial_j(g^{j i_1}\alpha_{i_1\cdots i_k})\;dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \tag{14.31}$$

となる．これより，δ はテンソルの発散 (divergence) の概念を一般化したものであることがわかる．

これに関連した演算子として重要なものにラプラス演算子 Δ がある．こ

れは

$$\Delta = d\,\delta + \delta\,d \tag{14.32}$$

で定義される．ラプラス演算子はk-形式からk-形式への写像を与える．$\Delta\omega = 0$ をみたす微分形式 ω は調和形式と呼ばれる．

リー微分

微分幾何学の概念でもう1つ非常に重要なものは，リー微分である．多様体 $\mathcal{M}$ 上の変換 $x^i \to x^i + \xi^i(x)$ は，ベクトル場 $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ で生成されると考えられる．特に，$\mathcal{M}$ 上の関数 f に対するこの変換のもとでの変化量は

$$\delta_\xi f = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv L_\xi f \tag{14.33}$$

で与えられる．これは f のベクトル場 ξ についてのリー微分と呼ばれる．微分1-形式 $A = A_i dx^i$ に対しては，変化の源は2つある．つまり，$A_i(x)$ の変化によるものと dx^i の変化（すなわち A_i の成分が定義されている基底の変化）によるものである．したがって，

$$\begin{aligned} L_\xi A &= \xi^j \frac{\partial A_i}{\partial x^j} dx^i + A_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} dx^j \\ &= \xi^j (\partial_j A_i - \partial_i A_j) dx^i + \partial_i (A_j \xi^j) dx^i \\ &= i_\xi dA + d(i_\xi A) = (i_\xi d + d i_\xi)\, A \end{aligned} \tag{14.34}$$

となることがわかる．ただし，i_ξ は式 (14.6) で導入された記号であり，ベクトル場 ξ と A の内部縮約を表す．関数のリー微分についての公式 (14.33) も $(i_\xi d + d i_\xi) f$ と書き直せることに注意しよう．これは，任意の関数に対して $i_\xi f = 0$ となるからである．微分 k-形式に対しては，添え字の反対称性から，i_ξ は

$$\begin{aligned} i_\xi \omega &= i_\xi \left(\frac{1}{k!} \omega_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \cdots \wedge dx^{i_k} \right) \\ &= \frac{1}{k!} (\xi^{i_1} \omega_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx^{i_2} \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &\qquad - \xi^{i_2} \omega_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_3} \cdots \wedge dx^{i_k} + \cdots) \end{aligned} \tag{14.35}$$

と定義される．これより，任意の微分形式に対してリー微分の演算子は

$$L_\xi = i_\xi d + d i_\xi \tag{14.36}$$

と表せることが確認できる.

つぎに，ベクトル $\eta = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ の ξ についてのリー微分を考えよう. $\frac{\partial}{\partial x^i}$ は dx^i の双対であるので,

$$\begin{aligned} L_\xi \eta &= \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \left[\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \end{aligned} \tag{14.37}$$

となる. このとき，リー微分は 2 つのベクトル場の交換子で与えられる.

まとめると，リー微分はベクトル場の作用のもとでの，任意の量の変化量を与えることがわかった. その際，その成分を定義するフレームの変化および成分そのものの変化の双方が考慮されている. したがって，これは物理的な意味をもつ微分の概念である. つまり，この微分は，ベクトル場の作用によって観測者がある点からその微小近傍の点へ移動するときに，任意の量がどれだけ変化するかを与えている.

14.2　多様体の幾何学的構造と重力

14.2.1　リーマン構造と重力

これまでの議論で多様体上のリーマン計量の概念に少し触れた. この節では，計量と多様体上のその他の幾何学的構造について，より詳しく考えてみよう.

計量は多様体上の隣接する 2 点間の距離の測度である. 座標間隔が dx^μ のとき，2 点間の距離の 2 乗を

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{14.38}$$

で定義する. ただし，$g_{\mu\nu}$ は対称共変テンソルであり，これによって空間の幾何学が特徴づけられる. また，ここで計量は特異でないことを要請する. つまり，$g_{\mu\nu}$ を行列とみなすと，$\det g \neq 0$ が満たされているとする.

$g_{\mu\nu}$ は対称行列なので，$(E^T E)_{\mu\nu}$ という形に書ける. 具体的には,

$$g_{\mu\nu} = E^a_\mu E^a_\nu \tag{14.39}$$

となる．ここで，a は n 次元多様体上で 1 から n の値をとる添え字である．$g_{\mu\nu}$ が特異でないので，E^a_μ は可逆である．$E^a = E^a_\mu dx^\mu$ は多様体上の 1-形式の基底を成す．これはフレーム場と呼ばれる．ここではユークリッド符号の計量をとっているので，$g_{\mu\nu}$ は行列式が正の行列である．ローレンツ符号をもつ空間では，フレーム場は $g_{\mu\nu} = E^a_\mu \eta^{ab} E^b_\nu$ で定義される．ただし，$\eta^{ab} = diag(1, -1, -1, -1)$ である．以下では，ユークリッド符号を継続してもちいる．ほとんどの結果はローレンツ符号に簡単に接続される．(ここで行ったように計量の定義から始めるのではなく，フレーム場を基本的な物理量とみなし，派生的な概念として計量を導入することも可能である.)

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を導くフレーム場は一意的には決まらない．R^{ab} を局所回転行列とすると，E^a と $R^{ab}E^b$ は同じ計量を導くことに注意しよう．よって，回転群 $SO(n)$ はここで考えているすべての空間上のゲージ対称性でなければならない．したがって，この回転群についてのゲージポテンシャル，あるいは接続 (connection)，$\omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu$ を導入しよう．これは，$SO(n)$ リー代数の値をもつ 1-形式である．このとき，捩率(れいりつ) (torsion) $\mathcal{T}^a$ とリーマン曲率 (curvature) $\mathcal{R}^{ab}$ は

$$\begin{aligned} dE^a + \omega^{ab} \wedge E^b &\equiv \mathcal{T}^a, \\ d\omega^{ab} + \omega^{ac} \wedge \omega^{cb} &\equiv \mathcal{R}^{ab} \end{aligned} \tag{14.40}$$

で定義される．ここで，$dE^a + \omega^{ab} \wedge E^b$ は E^a のゲージ共変な外微分である．接続 ω は，スピン接続と呼ばれ，回転作用のもとで $\omega^{ab} \to (\omega')^{ab} = R^{ac}\omega^{cd}(R^{-1})^{db} - dR^{ac}(R^{-1})^{cb}$ と変換する．曲率と捩率はゲージ共変な 2-形式である．ただし，捩率は回転作用のもとで $SO(n)$ のベクトル表現として変換するのに対し，$\mathcal{R}^{ab}$ は $SO(n)$ リー代数の値をとる．

このような計量と接続を備えた多様体 $\mathcal{M}$ が，さらに捩率ゼロの条件 $\mathcal{T}^a = 0$ をみたすとき，この多様体はリーマン多様体と呼ばれる．捩率ゼロの場合，スピン接続は，通常のゲージ選択の自由度をを除いて，計量によって決まる．これは次のように理解できる．$\mathcal{T}^a = 0$ であれば，局所座標をもちいて

$$\left[\partial_\mu E^a_\nu + \omega^{ab}_\mu E^b_\nu\right] - \left[\partial_\nu E^a_\mu + \omega^{ab}_\nu E^b_\mu\right] = 0 \tag{14.41}$$

と書ける．ここで，関係式

$$\partial_\mu E_\nu^a + \omega_\mu^{ab} E_\nu^b - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda E_\lambda^a = 0 \tag{14.42}$$

によって $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ を導入する．(14.41) から $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ は μ, ν について対称である．ω^{ab} が a, b について反対称であることを考慮すると，計量の定義から，

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0 \tag{14.43}$$

を得る．この式の添え字を入れ換えて，それらを適当に組み合わせると

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right) \tag{14.44}$$

となることがわかる．ここで，式 (14.42) に戻って，

$$\omega_\mu^{ab} = (E^{-1})^{b\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda E_\lambda^a - (E^{-1})^{b\nu} \partial_\mu E_\nu^a \tag{14.45}$$

と表せる．これらより，リーマン多様体では，計量 $g_{\mu\nu}$ によって $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ が決まることがわかる．また，計量はゲージ回転の自由度を除いて E_μ^a を決めるので，ω_μ^{ab} は計量から構成することができる．$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ はクリストッフェル記号と呼ばれる．

リーマン多様体のリーマン曲率は，(14.45) をもちいて，次のように変形することができる．

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mu\nu}^{ab} &= E_\lambda^a (E^{-1})^{b\alpha} \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}^\lambda, \\ \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}^\lambda &= \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda + \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Gamma_{\mu\alpha}^\beta . \end{aligned} \tag{14.46}$$

前に述べたように，フレーム E^a は 1-形式あるいは局所余接空間の基底を定義する．E_μ^a と $(E^{-1})^{a\alpha}$ は局所座標フレームと局所接フレーム・余接フレームの間の変換行列とみなせる．よって，これらをもちいて座標基底から局所接フレーム基底にテンソルを変換あるいは逆変換することができる．したがって，$\mathcal{R}_{\mu\nu\alpha}^\lambda$ は局所座標基底をもちいた曲率テンソルであるとみなせる．ベクトル V^a の共変微分は

$$(D_\mu V)^a = \partial_\mu V^a + \omega^{ab} V^b \tag{14.47}$$

で与えられる．座標基底をもちいて成分を $V_\mu = E_\mu^a V^a$ と定義すると，

$$D_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda \tag{14.48}$$

となる．したがって，式 (14.43) の左辺は計量テンソルの共変微分である．これより，計量はリーマン多様体上で共変的に一定であることがわかる．

リーマン曲率テンソルは空間の曲率を与える．これを見るために，閉曲線 C のまわりでのベクトル V^a の平行移動を考えよう．閉曲線を完全に 1 周したときのベクトルの向きの変化は

$$\begin{aligned} \delta V^a &= U^{ab} V^b, \\ U^{ab} &= P \exp\left(\oint_C \omega^{ab} S^{ab}\right) \\ &\approx 1 + \int_\sigma \mathcal{R}^{ab} S^{ab} \end{aligned} \tag{14.49}$$

で与えられる．ただし，S^{ab} は回転群の生成子である．いまの場合はベクトル表現を考えているので，これは $(S^{ab})_{cd} = \delta^a_c \delta^b_d - \delta^a_d \delta^b_c$ で与えられる．U^{ab} は (10.32) で与えられたゲージ理論の平行移動演算子を重力の場合に対応させたものである．ゲージ場の場合と同じように，(14.49) の最後の行では，微小領域の閉曲線に沿った積分が実行されている．(σ は境界 C で囲まれる表面積である.）式 (14.49) は，$\mathcal{R}^{ab}$ が確かに空間の曲率であることを示している．

リッチ・テンソル $\mathcal{R}_{\nu\alpha}$ とリッチ・スカラー（スカラー曲率）$\mathcal{R}$ はリーマン・テンソル $\mathcal{R}^\lambda_{\mu\nu\alpha}$ に関連した量であり，その添え字の縮約をとることによって次のように定義される．

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\nu\alpha} &\equiv \mathcal{R}^\lambda_{\lambda\nu\alpha} \\ &= \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} + \Gamma^\lambda_{\lambda\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} - \Gamma^\lambda_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\lambda\alpha}, \\ \mathcal{R} &\equiv g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}^\lambda_{\lambda\mu\nu}. \end{aligned} \tag{14.50}$$

上式から直接わかるように，リッチ・テンソル $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ は対称テンソルである．

アインシュタインの重力理論によると，時空間はローレンツ計量 $g_{\mu\nu} = E^a_\mu \eta^{ab} E^b_\nu$ をもつリーマン多様体である．計量は物質によって動力学的（ダイナミカル）に決まる．物質の分布が与えられたとき，その時空間の計量を与える方程式がアインシュタイン方程式であり，この方程式は

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi G\, T_{\mu\nu} \tag{14.51}$$

で与えられる．ここで，G はニュートンの重力定数であり，$T_{\mu\nu}$ は物質のエ

ネルギー運動量テンソルである．上式では，曲率テンソルをローレンツ符号をもちいて定義した．アインシュタイン方程式は作用

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,\mathcal{R} + \mathcal{S}_{matter} \\ &= -\frac{1}{64\pi G}\int \epsilon_{abcd}\,\mathcal{R}^{ab}\wedge E^c\wedge E^d + \mathcal{S}_{matter}\end{aligned} \tag{14.52}$$

の変分方程式として求めることができる．上式 2 行目では，積分を曲率 2-形式による 4-形式の積分として表した．作用の重力部分の変分は

$$\delta\mathcal{S} = -\frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{-g}\,d^4x\left[\mathcal{R}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \mathcal{R}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta\sqrt{-g} + \delta\mathcal{R}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\right] \tag{14.53}$$

となる．$\mathcal{R}_{\mu\nu}$ の変分には共変微分が現れる．また $D_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ なので，この項は積分すると表面項となる．$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ と物質場の変分についての結果 (3.107) をもちいると，方程式 (14.51) を確かめることができる．

物質と重力の結合は，通常の微分を共変微分で置き換えるゲージ原理によって実現される．したがって，重力と結合するスカラー場 φ の作用は

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g}\,d^4x\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \mathcal{L}_{int}\right] \tag{14.54}$$

で与えられる．ディラック理論の場合，対応する作用は

$$\mathcal{S}_{Dirac} = \int \sqrt{-g}\,d^4x\;\bar{\psi}\left[i\gamma^a(E^{-1})^{a\mu}\left(\partial_\mu - i\omega^{ab}S^{ab}\right) - m\right]\psi \tag{14.55}$$

になると予想される．ここで，S^{ab} はディラック・スピノールのスピン行列 $S^{ab} = -[\gamma^a, \gamma^b]/4i$ である．ゲージ理論の場合，作用は

$$\mathcal{S}_{YM} = -\frac{1}{4}\int \sqrt{-g}\,d^4x\;g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F^a_{\mu\nu}F^a_{\alpha\beta} \tag{14.56}$$

となる．$F = dA + A\wedge A$ に計量は関与しないので，座標変換あるいは局所回転についての共変微分を使う必要はない．もし座標基底による共変微分を使って上式を明示的に表すと，クリストッフェル記号は相殺する．

14.2.2　複素多様体

微分多様体が偶数の次元をもつとき，その座標を組み合わせて互いに複素共

役な座標の対を作れるかどうかを考えてみたい．というのも，2 次元多様体では，座標を組み合わせて $z = x_1 - ix_2$ と $\bar{z} = x_1 + ix_2$ の複素座標をとることが非常に有用であることが多いからである．一般の $2n$ 次元空間において（座標 x で表される）点での接空間を T_x とする．このとき，概複素構造 (almost complex structure)J は，各点 x で $J^2 = -1$ となる写像 $T_x \to T_x$ を与えるテンソル場として定義される．局所座標で考えると，これは $J^\mu_\alpha J^\alpha_\nu = -\delta^\mu_\nu$ となる量 J^μ_ν があることを意味する．このような構造があると，正則な座標微分 $(J^\mu_\nu + i\,\delta^\mu_\nu)dx^\nu$ を定義することができる．(ただし，この中の n 個だけが独立である.) したがって，J と座標微分の結合により座標微分の複素成分が得られる．つまり，J は基本的に座標微分を組み合わせて複素成分を構成する結合規則を与える．(概複素多様体が向き付け可能であることは示せるが，概複素構造がすべての偶数次元の多様体上で定義できるとは限らない．反例として，例えば S^4 がある.)

概複素構造は微分との局所的な結合規則を与える．しかし，ある条件のもとでは，概複素構造 J を積分することによって局所近傍での正則座標を定義することができ，最終的には多様体全体の複素構造を定義することができる．そこで，次に正則関数の概念を定義し，微分形式を異なるタイプに分類することを考えよう．(微分形式のタイプは (p,q) と分類することができる．ただし，(p,q) は p 個の正則な座標微分と q 個の反正則な座標微分をもつことを示す.) これらは座標の正則な変換のもとで同じタイプのままである．可積分性の条件は次のようにして得られる．正則微分を $\sigma^\mu = (J^\mu_\nu + i\delta^\mu_\nu)dx^\nu$ とすると，

$$d\sigma^\mu = A^\mu_{\alpha\beta}\sigma^\alpha\sigma^\beta + B^\mu_{\alpha\beta}\sigma^\alpha\bar{\sigma}^\beta + C^\mu_{\alpha\beta}\bar{\sigma}^\alpha\bar{\sigma}^\beta \tag{14.57}$$

と書ける．正則形式と反正則形式が常に分離している場合，$(1,0)$-形式の微分は $(2,0)$-形式と $(1,1)$-形式を生成し，$(0,2)$-形式を与えることはない．なぜなら，ここでは正則微分から始めているからである．これは，(14.57) の微分には $\bar{\sigma}^\alpha\bar{\sigma}^\beta$ に比例する項がないことを意味する．つまり，J をもちいて複素構造を定義するには，$C^\mu_{\alpha\beta}$ がゼロとなることを必要条件として課さなければならない．この条件は，次のナイエンハイス (Nijenhuis) テンソル

$$N^\alpha_{\mu\nu} = J^\gamma_\mu(\partial_\gamma J^\alpha_\nu - \partial_\nu J^\alpha_\gamma) - J^\gamma_\nu(\partial_\gamma J^\alpha_\mu - \partial_\mu J^\alpha_\gamma) \tag{14.58}$$

がゼロとなることと同じである．ニューランダー–ニレンベルク (Newlander–Nirenberg) の定理によると，概複素構造 J が $N^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$ をみたす多様体は，J がなめらかであれば，複素構造をもつことが許される．(ここで，J がなめらかであるとは，例えば C^{∞} のように，J がある連続性の条件を満たすことを意味する．）ここでも可積分性が自動的にみたされる保証はまったくない．実際，概複素構造をもつが複素多様体でない例は数多く存在する．可積分性をもたない概複素多様体の有名な例として，S^6 がある．実際には，次元が 4 以上の概複素多様体は必ず非可積分な概複素構造をもつ．これは，もしそのようなある多様体が可積分性をもっていたとしても，摂動により常に可積分性を破る多様体に変形することができるためである．

ここで特に興味深い多様体として，次に定義するケーラー多様体がある．$\mathcal{M}$ を複素構造 J（すなわち $N^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$ をみたす J）とリーマン計量 $g_{\mu\nu}$ をもつ $2n$ 次元多様体とする．関係式

$$g_{\mu\nu}\, J^{\mu}_{\alpha}\, J^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \tag{14.59}$$

が満たされるとき，計量はエルミートであると呼ばれる．このエルミート計量をもちいて，基本 2-形式 Ω を

$$\Omega = \frac{1}{2}\, J^{\alpha}_{\mu} g_{\alpha\nu}\; dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \tag{14.60}$$

と定義することができる．(式 (14.58) と (14.60) は局所座標をもちいて定義されているが，より不変性の高い形で表すこともできる）$g_{\mu\nu}$，J^{μ}_{ν} および Ω が与えられたとき，$d\Omega = 0$ であれば，$\mathcal{M}$ はケーラー多様体であると呼ばれる．この場合，Ω をケーラー形式，$g_{\mu\nu}$ をケーラー計量と呼ぶ．ケーラー多様体では，

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{a\bar{b}} dz^a d\bar{z}^{\bar{b}}, \\ \Omega &= \frac{i}{2} g_{a\bar{b}} dz^a \wedge d\bar{z}^{\bar{b}} \end{aligned} \tag{14.61}$$

となる複素座標 z^a, $\bar{z}^{\bar{a}}$ を選ぶことができる．さらに，計量はポテンシャル K をもちいて，

$$g_{a\bar{b}} = \frac{\partial}{\partial z^a}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{b}}} K \tag{14.62}$$

として表すことができる．K はケーラー・ポテンシャルと呼ばれる．ケーラー

多様体の例として，リーマン面と複素射影空間 $\mathbf{CP}^k$ がある．複素多様体であるがケーラー多様体でないものも数多くある．簡単な例として，$S^3 \times S^1$ が知られている．

14.3　コホモロジー群

これまで見てきたように，微分形式には閉形式であるが完全形式でないものが存在する．ポアンカレの補題により，局所的には，すべての閉形式は完全形式であるので，閉形式であるが完全形式ではないものが存在することは，多様体の大域的なトポロジーが非自明であることに関係している．コホモロジー類は多様体のこのような性質を記述する．

2 つの微分形式の差が完全形式で与えられるとき，これらの微分形式は同値の関係にあると定義する．つまり，ある微分形式 α をもちいて $\omega_1 = \omega_2 + d\alpha$ と書けるとき，$\omega_1 \sim \omega_2$ であるとする．この関係で定義される同値類はコホモロジー類と呼ばれる．より正確に表すと次のようになる．$\mathcal{C}^k(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ を多様体 $\mathcal{M}$ 上の k 次の閉形式の集合とし，$\mathcal{Z}^k(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ を $\mathcal{M}$ 上の k 次の完全形式の集合とする．ただし，微分形式の線形結合は実数を係数にもつとする．(括弧のなかの $\mathbf{R}$ はこのことを示している.）このとき，実係数をもつ k 次のコホモロジー群は

$$\mathcal{H}^k(\mathcal{M}, \mathbf{R}) = \mathcal{C}^k(\mathcal{M}, \mathbf{R})/\mathcal{Z}^k(\mathcal{M}, \mathbf{R}) \tag{14.63}$$

で定義される.（コホモロジー類は複素数や $\mathbf{Z}_2$ を係数の体とすることができるが，それらについてはここでは考えない.）

コホモロジー類それ自体では，多様体のトポロジーを完全に特徴づけることはできない．そのためには，他にも多くの量が必要である．

n 次元多様体 $\mathcal{M}$ において，$\mathcal{H}^0(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ と $\mathcal{H}^n(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ の 2 つのコホモロジー群は特別な意味をもつ．$\mathcal{M}$ をコンパクトで向き付け可能な境界をもたない多様体とする．また，V を体積形式としよう．$\oint_{\mathcal{M}} V \neq 0$ であるので，V は完全形式ではない．その次元から V は明らかに閉形式である．したがって，V は $\mathcal{H}^n(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ の要素の 1 つである．実際，定数倍を除いて，これは $\mathcal{H}^n(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ の唯一の要素である．というのも，もし ω が $\mathcal{H}^n(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ の別

の要素であるとすると，$\omega = cV$ と表すことができるからである．このとき，$d\omega = 0$, $dV = 0$ であるので，c は定数でなければならない．よって，$\mathcal{H}^n(\mathcal{M}, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$ となり，V はその表現要素 (representative element) とみなせる．

境界のないコンパクト多様体上では，$\alpha \in \mathcal{H}^k(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ と $\beta \in \mathcal{H}^{n-k}(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ の要素の内積

$$(\alpha, \beta) = \oint_{\mathcal{M}} \alpha \wedge \beta \tag{14.64}$$

を定義することもできる．部分積分をもちいると，$\alpha \to \alpha + d\varphi$, $\beta \to \beta + d\xi$ の変化のもとで，これは不変となるので，これは確かにコホモロジーの内積であることがわかる．($\mathcal{M}$ を境界のないコンパクト多様体に制限したことは，内積が存在し，部分積分が実行可能であることを保証するためである．もし微分形式が無限遠あるいは $\mathcal{M}$ の境界で十分に速く減衰するならば，この条件を緩めることができる.）コホモロジー群についてのポアンカレ双対性によると，この内積のもとで $\mathcal{H}^k(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ と $\mathcal{H}^{n-k}(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ は互いに双対なベクトル空間である．コンパクト多様体が連結した成分を 1 つだけしか持たないとき，$\mathcal{H}^0(\mathcal{M}, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$ と定義できるので，ポアンカレ双対性は $k = 0$ の場合にも成り立つ．

$\mathcal{H}^k(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ の次元は，多様体 $\mathcal{M}$ の k 次のベッチ数 b_k として知られる．多様体のオイラー数は $\chi(\mathcal{M}) = \sum_k (-1)^k \dim \mathcal{H}^k(\mathcal{M}, \mathbf{R}) = \sum_k (-1)^k b_k$ で与えられる．2 次元球面の場合，$\mathcal{H}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R}) = 0$, $\chi(S^2) = 2$ となる．また，種数が g のリーマン面の場合，$\chi = 2 - 2g$ となる．(S^2 の場合に $\mathcal{H}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R}) = 0$ となることは簡単にわかる．というのも，もしそうでなければ，$d\alpha = 0$ となる 1-形式 α が存在し，これが完全形式でもあることが次のようにわかるからである．この α を S^2 上の任意の閉ループで積分した値は，ループの変形のもとで不変である．S^2 上のすべてのループは 1 点に縮約されるので，この積分の値はゼロとなる．よって，α は完全形式でなければならないことがわかる.)

リー群のコホモロジー

リー群のコホモロジーは，物理の多くの問題で重要な役割を果たす．このコホモロジーはボレル (Borel)，ヒルツェブルフ (Hirzebruch) らによって何

年も前に研究された．ここでは，一般的な解析を与えることはせずに，リー群に関する微分形式の簡単な構成法を概観しよう．

リー群 G を考え，その典型的な要素を g で表す．g をパラメータ表示する方法は多数あり，例えば，$g=\exp(it^a\theta^a)$ と表示することができる．ここで θ^a は連続群のパラメータである．t^a は，g が行列表現にあるときに，その無限小変換の生成子を与える行列である．ここでの議論では，ほとんどの場合 t^a を基本表現にとる．したがって，$SU(n)$ 群を考えると t^a はトレースがゼロの $(n\times n)$ エルミート行列の基底であるとみなせる．よって，添え字は $1,2,\ldots,(n^2-1)$ の値をとる．g が与えられると，リー代数の値をもつ 1-形式

$$\omega = g^{-1}dg = -it^aE^a_i d\theta^i = -it^aE^a \tag{14.65}$$

を構成することができる．1-形式フレーム場 $E^a=E^a_i(\theta)d\theta^i$ は自発的対称性の破れについて議論した 12 章で導入したものである．ω の外積とトレースをとると，$\mathrm{Tr}(\omega^k)$ を構成することができる．k が偶数のとき，これはトレースの巡回不変性によりゼロとなる．例えば，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\omega^2) &= -\mathrm{Tr}(t^at^b)E^a\wedge E^b\\
&= -\mathrm{Tr}(t^bt^a)E^a\wedge E^b\\
&= \mathrm{Tr}(t^bt^a)E^b\wedge E^a\\
&= -\mathrm{Tr}(\omega^2)
\end{aligned} \tag{14.66}$$

となる．k が奇数のとき，$\Omega^{(k)}=\mathrm{Tr}\omega^k$ は一般にゼロでない．$d\omega=d(g^{-1}dg)=dg^{-1}\,dg=-g^{-1}dg\,g^{-1}dg=-\omega^2$ なので，$\mathrm{Tr}\omega^{even}=0$ を使うと

$$\begin{aligned}
d\Omega^{(k)} &= -\mathrm{Tr}\left(\omega^2\omega^{k-1}-\omega\,\omega^2\omega^{k-2}+\cdots\right)\\
&= 0
\end{aligned} \tag{14.67}$$

となることがわかる．したがって，$\Omega^{(k)}$ は微分閉形式である．これが完全形式でないことは，$\Omega^{(k)}$ の 1 つ 1 つについて解析することで最も簡単に示すことができる．以下では $SU(n)$ 群の場合に限って議論しよう．$k=1$ のとき，$\Omega^{(1)}=\mathrm{Tr}\omega$ となる．これは t^a のトレースがゼロであることから，$U(1)$ 群を考えない限り，ゼロである．$U(1)$ のときは $g=\exp(i\theta)$ となり，$\Omega^{(1)}=id\theta$ である．これを円周 $0\le\theta\le 2\pi$ で積分すると，

$$-i\oint \Omega^{(1)} = 2\pi \tag{14.68}$$

となる．もし $\Omega^{(1)}$ が完全であれば，$\Omega^{(1)} = d\alpha$ と書ける．ただし，α は（$U(1)$ 上の関数であるので）θ の周期関数となる．よって，この場合，ストークスの定理により $\oint \Omega^{(1)} = 0$ となる．(14.68) の結果は $\Omega^{(1)}$ が完全でないことを示している．したがって，これは $\mathcal{H}^1(U(1), \mathbf{R})$ の要素である．$k=3$ のときは，$\Omega^{(3)} = \mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^3$ となる．$SU(2)$ 群を考え，$a^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$ となる実数 a, b_i $(i = 1, 2, 3)$ をもちいて $g = a + ib_i\sigma_i$ とパラメータ表示する．これは，$SU(2)$ が 3 次元球面 S^3 であることを示している．$\Omega^{(3)}$ をこの S^3 で積分しよう．このために

$$a = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \qquad b_i = \frac{2u_i}{u^2 + 1} \tag{14.69}$$

と変数変換する．u_i $(i = 1, 2, 3)$ は制限のない実数 $-\infty \leq u_i \leq \infty$ であり，u^2 は $u_i u_i$ を表す．すると，積分は

$$\oint_{S^3} \Omega^{(3)} = -24\,\pi^2 \tag{14.70}$$

となり，$\Omega^{(3)}$ が完全でないことがわかる．したがって，$\Omega^{(3)}$ は $\mathcal{H}^3(SU(2), \mathbf{R})$ の要素である．その次元から，$\Omega^{(3)}$ は $SU(2)$ の体積要素に比例することがわかるので，$\mathcal{H}^3(SU(2), \mathbf{R}) = \mathbf{R}$ となる．この結果は任意のコンパクト・リー群 G について成り立つ．つまり，G がコンパクト・リー群のとき $\mathcal{H}^3(G, \mathbf{R}) \neq 0$ となり，$\Omega^{(3)}$ はその表現要素を与える．

同様な議論が $\Omega^{(5)} = \mathrm{Tr}\omega^5$ の場合にも適用できる．この場合，$\Omega^{(5)}$ の 5 次元球面 S^5 での積分が非自明であることを示す必要がある．そのような積分を計算するには，(14.69) と類似した群の要素のパラメータ表示が必要となるが，より簡単な議論をもちいることもできる．まず，$SU(2)$ 群は S^3 なので，この群についての $\mathrm{Tr}\omega^5$ はゼロであることに注意しよう．一般に，$\Omega^{(5)}$ は次の形で表される．

$$\begin{aligned}
\Omega^{(5)} &= -i\,\mathrm{Tr}(t^a t^b t^c t^d t^e)\, E^a \wedge \cdots \wedge E^e \\
&= -\frac{i}{4}\,\mathrm{Tr}(t^a [t^b, t^c][t^d, t^e])\, E^a \wedge \cdots \wedge E^e \\
&= \frac{i}{8}\, f^{bcm} f^{den} \mathrm{Tr}\left(t^a (t^m t^n + t^n t^m)\right)\, E^a \wedge \cdots \wedge E^e
\end{aligned}$$

$$= \frac{i}{8} d^{amn} f^{bcm} f^{den} E^a \wedge \cdots \wedge E^e. \tag{14.71}$$

($SU(2)$ のとき $d^{amn}=0$ なので，このとき $\Omega^{(5)}$ がゼロとなることは上式からもわかる.）$\Omega^{(5)}$ は $SU(n)\,(n \geq 3)$ のときにだけゼロでない値をとる．まず，8 次元の $SU(3)$ を考えてみよう．このとき，$\Omega^{(5)} \wedge \Omega^{(3)}$ は $SU(3)$ の体積要素に比例しなければならない．実際，

$$\begin{aligned}\Omega^{(5)} \wedge \Omega^{(3)} &= \mathrm{Tr}(t^a t^b t^c t^d t^e)\,\mathrm{Tr}(t^f t^g t^h)\, E^a \wedge \cdots \wedge E^h \\ &= i\frac{45}{2\sqrt{3}}\, V_{SU(3)}\end{aligned} \tag{14.72}$$

となる．ただし，

$$\epsilon_{ab\cdots h}\mathrm{Tr}(t^a t^b t^c t^d t^e)\,\mathrm{Tr}(t^f t^g t^h) = i\frac{45}{2\sqrt{3}} \tag{14.73}$$

をもちいた．$V_{SU(3)}$ は $SU(3)$ の体積要素であり，$E^a \wedge \cdots \wedge E^h = \epsilon^{a\cdots h} V_{SU(3)}$ で与えられる．これを $SU(3)$ で積分するとゼロでない値となるので，$\Omega^{(5)} \wedge \Omega^{(3)}$ の $SU(3)$ による積分はゼロでないことがわかる．すでに見たように，$\Omega^{(3)}$ はコホモロジー的に非自明であるので，この結果は $\Omega^{(5)}$ が閉形式であるが完全形式ではないことを示している．言い換えると，$\mathcal{H}^5(SU(3), \mathbf{R})$ はゼロでない．$SU(3)$ についてのこの結果はポアンカレの双対性からも導けることに注意しよう．というのも，すでに見たように $\mathcal{H}^3(SU(3), \mathbf{R})$ はゼロでないからである．$\mathcal{H}^3(SU(3), \mathbf{R})$ の場合と同じように，$\mathcal{H}^5(SU(3), \mathbf{R})$ の次元も 1 であり，その非自明な要素は $\Omega^{(5)}$ の定数倍で与えられる．この結果はすべての $SU(n)$ $(n \geq 3)$ で成り立つ．つまり，$\mathcal{H}^5(SU(n), \mathbf{R}) = \mathbf{R}$ $(n \geq 3)$ である．

$\Omega^{(5)}$ の定義から，

$$\begin{aligned}\Omega^{(5)}(gh) = \Omega^{(5)}(g) + \Omega^{(5)}(h) + d\,\mathrm{Tr}\Big[&-5dh\,h^{-1}\omega d\omega - 5\omega(dh\,h^{-1})^3 \\ &+ \frac{5}{2} dh\,h^{-1}\omega dh\,h^{-1}\omega\Big]\end{aligned} \tag{14.74}$$

がわかる．h が G の $SU(2)$ 部分群であるとき，$\Omega^{(5)}(h)=0$ であり，$\Omega^{(5)}(gh)$ と $\Omega^{(5)}(g)$ の差は完全形式のみで表される．$G = SU(3)$ に対して，コセット

空間 $SU(3)/SU(2)$ は S^5 である．よって，$\Omega^{(5)}$ を S^5 で積分する方法は，2 つある．$SU(3)$ にある球面を考えるか，あるいは $SU(2)$ 部分群を境界にもつ $SU(3)$ のディスクを考えるかである．（このディスクは $SU(3)/SU(2)$ の球面である．）どちらの場合も $\Omega^{(5)}$ の積分は関係するコホモロジーを特徴づける数を与えるが，この 2 つの結果は同じではない．

$\Omega^{(k)}$ $(k=7,9,\ldots)$ についても同様に議論することができる．一般に，k が奇数 $k=2r+1$ $(r=1,2,\ldots,n-1)$ であるとき，$\mathcal{H}^k(SU(n),\mathbf{R})$ は生成要素 $\Omega^{(k)}$ をもつ．$SU(n)$ の場合，これは $(n-1)$ 個の非自明なコホモロジー群を与える．$SU(n)$ のランクも $(n-1)$ であり，この群は $(n-1)$ 個の不変テンソルあるいはカシミール不変量をもつ．これは偶然ではない．つぎに見るように，不変テンソルとコホモロジーの要素の間には対応関係があることがわかる．G の任意の表現で $\Omega^{(k)}$ を計算すると，

$$\Omega^{(k)} \sim d_R^{a_1 a_2 \cdots a_{r+1}} f^{b_2 b_3 a_2} f^{b_4 b_5 a_3} \cdots E^{a_1} \wedge E^{b_2} \wedge E^{b_3} \wedge E^{b_4} \wedge E^{b_5} \cdots \tag{14.75}$$

となることがわかる．ここで，$d_R^{a_1 a_2 \cdots a_{r+1}}$ は $t^{a_1} t^{a_2} \cdots t^{a_{r+1}}$ の対称トレース（添え字を対称化したもののトレース）である．ただし，t^a は表現 R で与えられる．$d_R^{a_1 a_2 \cdots a_{r+1}}$ は G のリー代数についての不変テンソルである．したがって，$\Omega^{(k)}$ は実際に，不変テンソルとフレーム場 1-形式の適当な積で与えられる．後で議論するチャーン類とカシミール不変量の間にはヴェイユ準同形 (Weil homomorphism) として知られる対応関係がある．ここで議論した不変テンソルとリー群のコホモロジー類との関係は明らかにこれに関連している．

14.4　ホモトピー

多様体 $\mathcal{M}$ から別の多様体 $\mathcal{N}$ への 2 つの連続写像を $f_1(x):\mathcal{M}\to\mathcal{N}$, $f_2(x):\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ とする．実パラメータ $0\le\tau\le 1$ に依存する連続写像 $f(x,\tau)$ が存在し，$f(x,0)=f_1(x)$, $f(x,1)=f_2(x)$ をみたすと仮定しよう．このとき，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ は互いにホモトピック (homotopic) であるという．基本的に，これは $f_1(x)$ が連続的に $f_2(x)$ に変形できることを意味する．τ はこの変形を特徴づけるパラメータである．

$\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への写像が多数あるとき，写像の同値関係 $f_1 \sim f_2$ は，f_1 と f_2 が互いにホモトピックであることにより定義できる．このとき，$\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への写像は同値類で分類できる．それぞれの同値類に属す写像は互いにホモトピックである．$\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への写像に関するこれらのホモトピー類は重要である．というのも，ある物理量が写像（あるいは関数）のなめらかな変形によって不変である場合が多いからである．よって，それらの性質を正確に特徴づけるには，ホモトピーの概念が重要となる．

ホモトピー類は任意の多様体 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ で定義できるが，球面から多様体 $\mathcal{N}$ の写像が特に重要である．k 次元球面 S^k から多様体 $\mathcal{N}$ への写像のホモトピー類は $\Pi_k(\mathcal{N})$ で表される．以下では，これについて詳しく考えてみよう．

まず $\Pi_1(\mathcal{N})$ から考えよう．これは $\mathcal{N}$ の基本群 (fundamental group) とも呼ばれる．$\Pi_1(\mathcal{N})$ は写像 $S^1 \to \mathcal{N}$ のホモトピー類についての基本群である．このような写像は $\mathcal{N}$ 内の閉ループを記述する．よって，ホモトピー的に同値な写像は連続的に相互変形できる $\mathcal{N}$ 内の閉ループで与えられる．したがって，$\Pi_1(\mathcal{N})$ は $\mathcal{N}$ 内のループ連結性によって特徴づけられる．

非自明な基本群の最も簡単な例は，1 点（例えば原点）が取り除かれた 2 次元平面 $\mathcal{N} = \mathbf{R}^2 - \{0\}$ で与えられる．これは，少なくとも部分的には，より複雑な場合のひな型を与える．このとき，原点のまわりに可縮でない経路があることは明らかであろう．この空間上の経路の「非自明性」は，次のように特徴づけられる．まず，x を始点・終点にもつループで，原点を囲まないものを考えよう．これらのループは合成則をもつ．C_0 をそのようなループの 1 つとし，C_0' を同じ始点をもつ別のループであるとすると，合成された経路 $C_0 + C_0'$ は，まず C_0 に沿ったのちに，C_0' へと続く経路として定義できる．原点を 1 回りする経路 C_1 を定義することもできる．このとき，合成された経路 $C_1' = C_1 + C_0$ は，x を始点として C_1 に沿って原点を 1 回りした後に C_0 へ続く経路を表す．なめらかな変形によって互いに一致する経路は同値であるので，$C_0 \sim C_0'$, $C_1 \sim C_1'$ であるが，明らかに $C_0 \not\sim C_1$ である．また，C を逆方向に巡るループを $-C$ と定義できる．これらより，この空間上のループは $C_0 + C_0 \sim C_0, C_1 + C_0 \sim C_1, C_1 + C_1 \sim C_2$ となる構造をもつことがわかる．したがって，これらのループは C_0 をゼロとする整数 $\mathbf{Z}$ の群のように振る舞う．すなわち，$\Pi_1(\mathbf{R}^2 - \{0\}) = \mathbf{Z}$ である．$\mathbf{Z}$ の加算が

幾何学的なループの合成によって表されているとすると，これは群の構造をもつ．より一般的に，写像の合成を適切に表現すると，$\Pi_k(\mathcal{N})$ は群を成す．このため，$\Pi_k(\mathcal{N})$ はホモトピー群と呼ばれる．

$\mathbf{R}^2-\{0\}$ の場合には，ループの不変量を次のように定義するとループの合成と整数群の関係がより明確になる．始点・終点が x のループ C に対して，積分

$$\nu(C)=\int_{x,C}^{x}\alpha_i dx^i \tag{14.76}$$

を導入しよう．ここで，$\alpha_i dx^i$ は微分 1-形式である．ループ C の微小変形のもとで不変となる ν を考えたい．つまり，

$$\partial_i\alpha_j-\partial_j\alpha_i=0 \tag{14.77}$$

を要請する．さらに，原点を 1 回りする経路が $\oint\alpha_i dx^i=1$ となる条件を課す．この条件と (14.77) から，2 次元の問題として α_i を

$$\alpha_i=-\frac{1}{2\pi}\frac{\epsilon_{ij}x^j}{x^2} \tag{14.78}$$

と決めることができる．極座標 (r,φ) では，$\alpha_i dx^i=d\varphi$ となる．よって，$\nu(C_0)=0$, $\nu(C_1)=1$, $\nu(C_2)=2$, $\nu(-C_1)=-1$ などが成り立つ．$\nu(C)$ は閉曲線 C のトポロジカル不変量である．つまり，これは曲線の微小変形のもとで不変であり，任意の閉曲線 C に対して整数を与える．これは $\Pi_1(\mathbf{R}^2-\{0\})=\mathbf{Z}$ の要素である．この整数は，経路が原点のまわりを何周したかを，経路の向きも考慮して表す数である．$\nu(C)$ は C の巻き数と呼ばれる．

上の議論はコホモロジー群との興味深い関係性を示している．$\alpha=\alpha_i dx^i$ を $\mathcal{N}=\mathbf{R}^2-\{0\}$ 上の 1-形式とみなすと，条件 (14.77) は $d\alpha=0$ であることを意味する．よって，α は閉 1-形式である．一方，もしこれが完全であれば，$\mathcal{N}$ 上のある（一価の）関数 h で $\alpha=dh$ と書ける．この場合，$\nu(C)$ はゼロとなる．(φ は一価関数でないので，$\alpha=d\varphi$ であっても α が完全形式とは言えない.）したがって，閉じているが完全ではない 1-形式，あるいはコホモロジー群 $\mathcal{H}^1(\mathcal{N},\mathbf{R})$ の要素によって $\Pi_1(\mathcal{N})$ の要素が表されている．ここで，$\mathcal{H}^1(\mathcal{N},\mathbf{R})$ の要素のなかでも特に，微分形式の線形結合をとる際の係数として整数を考えれば十分，すなわち，$\mathcal{H}^1(\mathcal{N},\mathbf{Z})$ を考えればよいことがわかる．

この群の生成要素は $\mathcal{H}^1(\mathcal{N}, \mathbf{R})$ と同じである．これは $\mathcal{H}^1(\mathcal{N}, \mathbf{R})$ を整数係数だけに制限していることになるので，コホモロジー群 $\mathcal{H}^1(\mathcal{N}, \mathbf{Z})$ は整数 $\mathbf{Z}$ の群であり，α はその表現要素となる．この 1-形式をループで積分すると $\nu(C)$ が得られる．より正確に言うと，ここでは写像 $x(\tau) : S^1 \to \mathcal{N}$ をもちいて $\mathcal{N}$ 上の微分形式を（τ を座標にもつ）S^1 上の微分形式に引き戻したのちに，S^1 で積分を行っている．ホモトピー群が $\mathbf{Z}$ であるとき，写像 $f : S^k \to \mathcal{N}$ で引き戻された $\mathcal{H}^k(\mathcal{N}, \mathbf{R})$ の非自明な要素を S^k で積分することによって，ホモトピー群 $\Pi_k(\mathcal{N})$ の要素が表される場合が多い．

しかしながら，コホモロジー群とのこの関係は一般性をもたない．ホモトピーとコホモロジーは異なる概念であり，一般にこれらは一致しない．例えば，$\Pi_3(S^2) = \mathbf{Z}$ であるが，2 次元多様体上では微分 3-形式は存在しないので明らかに $\mathcal{H}^3(S^2, \mathbf{R}) = 0$ である．ホモトピー群についての注意点をもう少し挙げよう．Π_1 は非アーベル群となることができるが，一方 $\mathcal{H}^1(\mathcal{N}, \mathbf{R})$ はアーベル群となる．ただし，$k > 1$ のとき，$\Pi_k(\mathcal{N})$ はアーベル群である．ホモトピー群が整数群であるとき，多くの場合，コホモロジー群の要素をもちいてこのホモトピー群の要素を特徴づける巻き数を定義できる．また，ホモトピー群 $\Pi_0(\mathcal{N})$ は $\mathcal{N}$ の連結された成分によって定義される．$\mathcal{N}$ に連結成分が 1 つしかない場合，$\Pi_0(\mathcal{N})$ の要素は 1 つだけとなる．

球面のホモトピー群

コホモロジー群からホモトピー群が得られる例として，球面がある．この場合，$\Pi_n(S^n) = \mathbf{Z}$, $\Pi_k(S^n) = 0$ $(k \leq n-1)$ となる．コホモロジーの要素をもちいて，$\Pi_n(S^n)$ を表す巻き数を書き下すことを考えよう．いまの場合は，写像 $n^a(x) : S^n_M \to S^n_N$ を考えている．ただし，n^a $(a = 1, 2, \ldots, n+1)$ は $n^a n^a = 1$ をみたし，標的空間 S^n_N の座標を表す．x は底球面 S^n_M の座標を表す．標的空間 S^n_N の体積形式は

$$dV = \frac{1}{n!} \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}} \, n^{a_1} \; dn^{a_2} \wedge dn^{a_3} \wedge \cdots \wedge dn^{a_{n+1}} \tag{14.79}$$

で与えられる．これを写像 $n^a(x)$ で引き戻すと，つまり単に上の公式の n^a に $n^a(x)$ を代入すると，始めの n 次元球面 S^n_M 上の微分 n-形式が得られる．これを S^n_M で積分すると，写像 $n^a(x)$ についての巻き数

$$Q[n] = \frac{1}{n!\,vol(S^n)} \int_{S^n_M} \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}\, n^{a_1}\, dn^{a_2} \wedge dn^{a_3} \wedge \cdots \wedge dn^{a_{n+1}} \quad (14.80)$$

を定義することができる．$vol(S^n)$ は n 次元球の体積であり，オイラーのガンマ関数をもちいて，

$$vol(S^n) = \frac{2\,\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad (14.81)$$

で与えられる．

$Q[n]$ が実際に同値なホモトピー類に対して不変であることは簡単に示せる．$n^a(x)$ の微小変形 $n^a(x) + \delta n^a(x)$ を考えよう．すると，直接的な計算から

$$Q[n+\delta n] - Q[n] = \frac{1}{n!vol(S^n)} \int_{S^n_M} (n+1)\delta n^{a_1} \omega_{a_1} - n\, d\omega',$$

$$\omega_{a_1} = \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}\, dn^{a_2} \wedge \cdots \wedge dn^{a_{n+1}}, \quad (14.82)$$

$$\omega' = \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}} \left(\delta n^{a_1}\, n^{a_2}\, dn^{a_3} \wedge \cdots \wedge dn^{a_{n+1}}\right)$$

がわかる．$n^a n^a = 1$ なので，$n^a dn^a = 0$ である．dn は n^a に直交するので，反対称 n 重積 $\epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}\, dn^{a_2} \wedge \cdots \wedge dn^{a_{n+1}}$ は n^{a_1} に比例する．$Q[n]$ の変分の第 1 項は，$\delta n^a\, n^a$ に比例し，ゼロとなる．というのも，変分 $\delta n^a(x)$ も条件 $n^a n^a = 1$ から $n^a \delta n^a = 0$ に従うためである．第 2 項は全微分項となり，閉空間 S^n_M で積分するとゼロとなる．したがって，$Q[n+\delta n] = Q[n]$ であり，$Q[n]$ は写像 $n^a(x)$ の連続的な変形のもとで不変であることがわかる．したがって，$Q[n]$ はホモトピー不変な量である．また，この議論では微分形式しかもちいていないので，これは 2 つの空間 S^n_M と S^n_N の計量やその他の幾何学的な構造に依存しない．

$n^1 = 1$ でその他の n はすべてゼロであるような特別な写像を考えると，これは球面 S^n_M から標的空間 S^n_N 上の点への写像を与える．この場合，明らかに Q はゼロである．球面 S^n_M の座標を $x^a x^a = 1$ をみたす x^a で表すと，写像 $n^a = x^a$ は，標的球面と底球面を一致させる．このとき，$Q = (1/vol(S^n)) \int dV = 1$ である．したがって，写像 $n^a = x^a$ のなめらかな変形はすべて，巻き数が 1 の同値類に属する．

もう 1 つの興味深い結果として，一般に，すべての $k \geq 2$ に対して $\Pi_k(S^1) = 0$ が成り立つ．またこれ以外にも，$\Pi_{n+k}(S^n)$ の形で与えられる球面のホモトピー群には面白い結果がたくさんある．例えば，$\Pi_3(S^2) = \mathbf{Z}$, $\Pi_4(S^2) = \mathbf{Z}_2$,

$\Pi_{11}(S^6) = \mathbf{Z}$ などが成り立つ．これらの結果をコホモロジー群から導く簡単な方法はないので，ここではこれ以上議論しない．ただ，後で議論するホモトピー群の完全系列をもちいると，上で構成したように，これらは巻き数と関連づけられる場合がある．

コンパクト連結リー群のホモトピー群

コンパクト連結リー群 G（これは $G = SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 で分類される）のホモトピー群は計算されており，標準的な数学の文献に記載されている．その一般的な結果をいくつか紹介すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\Pi_1(G) = \begin{cases} \mathbf{Z} & (G = SO(2)) \\ \mathbf{Z}_2 & (G = SO(n),\ n \geq 3), \\ 0 & (\text{その他の } G) \end{cases} \\
&\Pi_2(G) = 0 \qquad (\text{すべての } G \text{ について}), \\
&\Pi_3(G) = \begin{cases} \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} & (G = SO(4)) \\ \mathbf{Z} & (\text{その他の } G) \end{cases}, \\
&\Pi_{2r+1}(SU(n)) = \mathbf{Z} \qquad (n - 1 \geq r).
\end{aligned} \tag{14.83}$$

$SO(3)$ の基本群が $\mathbf{Z}_2$ となる結果は，$SO(3)$ が 2 重に連結していることを示している．もちろん，これはよく知られた結果であり，回転群のスピノール表現の二価性に関係している．

(14.83) の結果以外にも一般的な結果があるが，ここではコホモロジーの要素で巻き数が表される場合をいくつか考えるにとどめよう．リー群のコホモロジー群についての議論で見たように，$SU(n)$ 群の場合，コホモロジー $\mathcal{H}^{2r+1}(SU(n), \mathbf{R})$ は非自明な生成要素を 1 つもち，それは $\mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^{2r+1}$ $(n - 1 \geq r)$ の形で与えられる．これをもちいて対応するホモトピー群の写像 $g(x) : S^{2r+1} \to SU(n)$ $(n - 1 \geq r)$ についての巻き数を $Q = \lambda \int_{S^{2r+1}} \mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^{2r+1}$ と表すことができる．ただし，λ は規格化定数であ

る．これは (14.83) の最後の結果を表示している．特に，Π_3 の場合，

$$Q[g] = -\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3} \mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^3 \tag{14.84}$$

となることがわかる．直感的には $SU(2)$ を S^3 としてこの結果を理解できるので，これは以前の結果 $\Pi_3(S^3) = \mathbf{Z}$ を与える．高次の群の場合，3 次元球面 S^3 が写像される $SU(2)$ 部分群を必ず含む．定義 (14.84) から，簡単に

$$Q[gh] = Q[g] + Q[h] \tag{14.85}$$

が確認できる．これ以外の混合項は全微分となるので，積分してゼロとなる．h が微小変形でその巻き数がゼロとすると，この結果から $Q[gh] = Q[g]$ つまり Q のホモトピー不変性がわかる．さらに，g_1 が巻き数 1 を与えるとすると，巻き数 2 は $g_1 g_1$ で与えられ，また巻き数 -1 の要素は $g_1^\dagger$ となる．よって，Q をもちいてホモトピー群 $\Pi_3(SU(n))$ を表す $\mathbf{Z}$ を生成できることがわかる．

14.5　ゲージ場

この節では，微分形式の枠組みをもちいると，ゲージ理論を非常に自然に議論できることを見てみよう．まず，電磁場の場合から考えよう．

14.5.1　電磁力学

電磁場はベクトルポテンシャル A_μ で記述され，これは共変微分 $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ を通して理論に導入される．(ここでは，マクスウェル理論の慣習的な表示法にならい，共変微分の結合定数 e を明示する．) よって，A_μ は共変ベクトルであり，1-形式

$$A = A_\mu dx^\mu \tag{14.86}$$

を定義できる．これに外微分を施すと

$$\begin{aligned} dA &= \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned}$$

$$\equiv F \tag{14.87}$$

となることがわかる．よって，場の強さのテンソルは 1-形式ポテンシャル A の外微分である．通常の電磁場成分は

$$\begin{aligned} F &= F_{0i}\ dx^0 \wedge dx^i + \frac{1}{2}F_{ij}\ dx^i \wedge dx^j \\ &= E_i\ dx^0 \wedge dx^i + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}B_k\ dx^i \wedge dx^j \end{aligned} \tag{14.88}$$

で与えられる．$d^2 = 0$ であるので，直ちに $dF = 0$ がわかる．これを成分表示すると，

$$dF = \frac{1}{3!}\left(\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu}\right) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\alpha = 0 \tag{14.89}$$

となる．これはビアンキ恒等式と呼ばれ，源（ソース）がないときのマクスウェル方程式に一致する．

4 次元では，F のホッジ双対も 2-形式である．(14.88) の F から得られる反変テンソルは

$$T_F = -E_i \frac{\partial}{\partial x^i}\ \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}B_k \frac{\partial}{\partial x^j}\ \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{14.90}$$

である．これと体積形式 $dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ の縮約をとると，

$${}^*F = B_i\ dx^0 \wedge dx^i - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}E_k\ dx^i \wedge dx^j \tag{14.91}$$

を得る．(式 (14.88)–(14.91) では，空間成分の添え字の上下を区別していない．ミンコフスキー計量によるマイナス符号はすべて書き出されている．また，空間成分の添え字の上げ下げはクロネッカーの δ で行われている．)

マクスウェル理論のカレントはベクトルなので，これも 1-形式とみなすことができる．その双対は 3-形式

$${}^*J = J^0 d^3x - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_k\ dx^0 \wedge dx^i \wedge dx^j \tag{14.92}$$

で与えられる．ここで，方程式 $d^*F = {}^*J$ が源がある場合のマクスウェル方程式となることは簡単に確認できる．まとめると，マクスウェル方程式は

$$\begin{aligned} F &= dA, \\ d^*F &= {}^*J \end{aligned} \tag{14.93}$$

となる．$d^2 = 0$ を再度もちいると，第 2 式から $d^*J = 0$ が得られる．これはカレントの保存則である．

マクスウェル理論の作用は

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} F \wedge {}^*F + \int_{\mathcal{M}} A \wedge {}^*J \tag{14.94}$$

と表される．

古典的な電磁気学では，ポテンシャルから始める代わりに，2-形式 F を基本的な変数として，方程式を

$$\begin{aligned} dF &= 0, \\ d^*F &= {}^*J \end{aligned} \tag{14.95}$$

と表す．F が閉じているので，ポアンカレの補題をもちいると少なくとも局所的には $F = dA$ と書ける．これより，ポテンシャルを導くことができる．ポテンシャルの存在は局所的にしか保証されておらず，大域的にポテンシャルを定義できない場合がある．前出のコホモロジー群の定義から，これは多様体が非自明な 2 次のコホモロジーをもつときつまり $\mathcal{H}^2 \neq 0$ のときに起こることがわかる．その例として，磁気単極子（モノポール）について簡単に議論しよう．

14.5.2　ディラックの磁気単極子 —— 第一考

磁荷 g をもつ点状の磁気単極子を考えよう．この磁気単極子の位置を座標原点にとると，磁場は

$$B_i = g\,\frac{x_i}{|x|^3} \tag{14.96}$$

となる．これは原点 $|x| = 0$ に特異点をもつので，非特異な場を得るには，これを $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ つまり $\mathbf{R}^3$ から原点を除いたもので定義しなければならない．$\mathcal{M} = \mathbf{R}^3 - \{0\}$ のとき，原点のまわりに可縮でない球面を描くことができる．よって，この空間は非自明なトポロジーをもつ．(14.96) に対応する 2-形式 F は

$$F = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\, g\,\frac{x_k}{|x|^3} dx^i \wedge dx^j \tag{14.97}$$

となる．これより，直接 $dF=0$ を確かめることができる．(実際には，δ 関数 $\delta^{(3)}(x)$ が現れるが，$\mathcal{M}$ は原点を含まないので，これは $\mathcal{M}$ 上でゼロである.）F を原点のまわりの球面で積分すると，

$$\begin{aligned}\int_{S^2} F &= \int_{S^2} \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\, g\, \frac{x_k}{|x|^3} dx^i \wedge dx^j = g \int_{S^2} \frac{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} \\ &= 4\pi\, g \end{aligned} \tag{14.98}$$

となる．したがって，F は $\mathcal{M}$ で閉じているが完全ではない微分形式である．これより，$\mathcal{H}^2(\mathbf{R}^3 - \{0\}) \neq 0$ となることもわかる．

原点を囲む球面は 2 つの座標パッチで記述できる．つまり，一方は北半球 $(x^3 > 0-\epsilon)$ を覆い，もう一方が南半球 $(x^3 < 0+\epsilon)$ を覆って，2ϵ の幅をもつ赤道で 2 つのパッチが重なるようにすればよい．各パッチでポアンカレの補題をもちいると，ある A を使って F を dA と表せる．このとき

$$\begin{aligned} A_N &= g\, \frac{\epsilon_{abc} n_a x_b}{r(r+n\cdot x)}\, dx^c, \\ A_S &= -g\, \frac{\epsilon_{abc} n_a x_b}{r(r-n\cdot x)}\, dx^c \end{aligned} \tag{14.99}$$

と直接計算できる．ただし，$n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1, r^2 = x\cdot x$ である．A_N は北半球に対応し，$n\cdot x = -r$ となる南極で特異点をもつ．同様に，A_S は南半球に対応し，北極に特異点をもつ．これらのポテンシャルの特異点は，F が閉形式であるが完全形式でないため，非特異なポテンシャルとならないことを反映している．特異点は（南極か北極の）1 点に位置するので，全空間 $\mathcal{M}$ では，無限に延びる特異点の線が存在し，A_N と A_S は異なる関数とみなせる．この特異点の線はディラック・ストリングと呼ばれる．この 2 つのポテンシャルを各パッチでもちいると，$\mathcal{M}$ の全域で特異点を回避することができる．

2 つのポテンシャルは $n\cdot x = 0$ となる赤道で重なっている．この領域では，

$$A_N - A_S = 2g\, \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{(x_1^2 + x_2^2)} = 2g\, d\varphi \tag{14.100}$$

となることがわかる．ここで，φ は方位角（経度）を表す．重なった領域でのポテンシャルの差は，ゲージ・パラメータ $\Lambda = 2g\,\varphi$ をもつゲージ変換で与えられる．したがって，この領域での物理的な場 $\boldsymbol{B}$ は，A_N と A_S のどち

らで計算しても，同じである．

14.5.3 非アーベル型ゲージ場

つぎに，非アーベル型ゲージ場を考えよう．この場合，ポテンシャルは，リー代数の要素でもあるので，リー代数の値をもつ 1-形式 A を局所座標をもちいて，

$$A = (-it^a)A^a_\mu dx^\mu \tag{14.101}$$

と表そう．ここで，t^a はエルミート行列であり，群のリー代数の基底を成す．上式からわかるように，A は反エルミートである．多くの場合，A をこのようにとると計算が簡単になる．

関数 ϕ の共変外微分は，$D\phi = (d+A)\phi$ で与えられる．したがって，$d^2 = 0$ と $d(A\phi) = dA\phi - Ad\phi$ をもちいると，$D^2\phi = (d+A)(d+A)\phi = (dA+A^2)\phi$ が得られる．（ウェッジ積の記号は，文脈から明らかな場合は省略することとする．）この計算から，場の強さを

$$F = dA + A^2 \tag{14.102}$$

と定義しなければならないことがわかる．ポテンシャルの表式を代入すると，これは

$$\begin{aligned} F &= \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}(-it^a)A^a_\nu + (-it^b)(-it^c)A^b_\mu A^c_\nu\right] dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2}\left[(-it^a)(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) + [(-it^b),(-it^c)]A^b_\mu A^c_\nu\right] dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2}(-it^a)\left[\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu\right] dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned} \tag{14.103}$$

と変形できる．2 行目ではウェッジ積の反対称性をもちいた．この場の強さは確かに，以前のゲージ場の議論から期待される形と同じであることがわかる．

群の要素 g によるポテンシャルのゲージ変換は

$$A \to A^g = gAg^{-1} - dgg^{-1} \tag{14.104}$$

と書ける．(14.102) をもちいると，直接 $F^g = gFg^{-1}$ を確認することがで

きる．

ビアンキ恒等式はアーベル型の場合より複雑になり，

$$
\begin{aligned}
dF &= dA\,A - A\,dA \\
&= (F - A^2)\,A - A\,(F - A^2) \\
&= F\,A - A\,F
\end{aligned}
\tag{14.105}
$$

となることがわかる．成分表示をすると，これは通常のビアンキ恒等式

$$
D_\mu F_{\nu\alpha} + D_\alpha F_{\mu\nu} + D_\nu F_{\alpha\mu} = 0 \tag{14.106}
$$

となる．

ヤン–ミルズ作用は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &= -\frac{1}{2e^2}\int_{\mathcal{M}} F^a \wedge {}^*F^a \\
&= \frac{1}{e^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}(F \wedge {}^*F)
\end{aligned}
\tag{14.107}
$$

と表される．ただし，行列 t^a の規格化を $\mathrm{Tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ とした．

非アーベル型ゲージ理論の微分形式を使った計算例として，次の量を考えよう．

$$
\begin{aligned}
\nu[A] &= -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}(F\,F) \\
&\equiv \int_{\mathcal{M}} \Omega.
\end{aligned}
\tag{14.108}
$$

これはインスタントン数として知られる量であり，その物理的な意味については後で議論する．ここでは，

$$
\begin{aligned}
d\,\Omega &= -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}\,(dF\,F + F\,dF) \\
&= -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}\,((FA - AF)\,F + F\,(FA - AF)) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{14.109}
$$

となることに注意しよう．ただし，上式でトレースの巡回不変性をもちいた．(α, β をそれぞれ行列の値をもつ k-形式，p-形式とすると，$\mathrm{Tr}(\alpha\,\beta) =$

$(-1)^{pk}\,\mathrm{Tr}(\beta\,\alpha)$ が成り立つ．これは，局所座標の表式をもちいると簡単に確認できる.）したがって，4-形式 Ω は閉形式であり，ポアンカレの補題から，次式をみたす 3-形式 K を得ることができる.

$$\Omega = -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(F\,F) = dK. \tag{14.110}$$

K は d と A で構成された 3-形式なので，

$$K = a\,\mathrm{Tr}(AdA + b\,A^3) \tag{14.111}$$

の形で表されるはずである．ただし，a, b は定数である．よって，

$$\begin{aligned} dK &= a\,\mathrm{Tr}\left(dAdA + b\;dA\,A^2 - b\,AdA\,A + b\,A^2dA\right) \\ &= a\,\mathrm{Tr}\left(dAdA + 3b\;dA\,A^2\right) \\ &= a\,\mathrm{Tr}\left((F - A^2)(F - A^2) + 3b\,(F - A^2)A^2\right) \\ &= a\,\mathrm{Tr}\left(F\,F + (3b-2)\,FA^2\right) \end{aligned} \tag{14.112}$$

となる.（ただし $\mathrm{Tr}A^4 = 0$ をもちいた.）$3b = 2$, $a = -1/8\pi^2$ とすると，次の結果を得る.

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}\left(A\,dA + \frac{2}{3}\,A^3\right) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}\left(A\,F - \frac{1}{3}\,A^3\right). \end{aligned} \tag{14.113}$$

K はチャーン–サイモンズ (Chern–Simons) 3-形式として知られている.

Ω はゲージ不変であるが，K はそうならないことに注意しよう．ゲージ変換 (14.104) から，

$$\begin{aligned} K[A^g] &= -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}\left((A+v)F - \frac{1}{3}(A+v)^3\right) \\ &= K[A] - \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}\left(vdA - v^2A - \frac{1}{3}v^3\right) \\ &= K[A] + d\left[\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(vA)\right] + \frac{1}{24\pi^2}\mathrm{Tr}(dg\,g^{-1})^3 \end{aligned} \tag{14.114}$$

となることがわかる．ただし，$v = dg\,g^{-1}$ であり，$dv = v^2$ となることをもちいた．最後の項は g のパラメータの少なくとも 3 次の項なので，微小変化

の場合，K の変化分は完全形式で与えられる．この最後の項は非自明なトポロジーをもつ 3 次元空間で積分すると，ゼロでない値を与える．この非自明な寄与については 16 章で詳しく議論する．K がゲージ不変でないので，Ω を 4 次元の閉多様体で積分したものつまり ν がゼロであるとは言えないことに注意しよう．モノポールの場合と同様に，ν がゼロでなければ K は特異点をもち，K は異なる座標パッチのそれぞれで個別に定義されなければならない．ただし，各パッチ上の K はパッチの重なり合った領域でのゲージ変換によって関連づけられる．

14.6 ファイバー束

ファイバー束は場の理論に内部対称性を導入するのに最も適した数学的な概念である．時空間の多様体 $\mathcal{M}$ 上の空間 $\mathcal{F}$ に値をとる場 ϕ^i の集合を考えよう．また，$\mathcal{M}$ の近傍 U を考えると，この近傍での理論に必要な情報は (U, ϕ^i) で与えられる．したがって，$\phi^i(x) : U \to \mathcal{F}$ が U から $\mathcal{F}$ への写像となる直積構造 $U \times \mathcal{F}$ を考えることができる．ファイバー束はこの概念を定式化したものである．

多様体 $\mathcal{M}$ 上のファイバー束は，多様体 $\mathcal{E}$ で表され，これは局所的には $\mathcal{M}$ 上にある $\mathcal{M}$ と $\mathcal{F}$ の直積で与えられる．ただし，$\mathcal{F}$ も多様体である．したがって，U_i は $\mathcal{M}$ の開集合であり，それぞれの U_i について $\mathcal{E} = U_i \times \mathcal{F}$ となる．ファイバー束は $(\mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{M})$ の 3 つの要素で表される．$\mathcal{F}$ はファイバー (fiber)，$\mathcal{E}$ は束(そく)(bundle)，$\mathcal{M}$ は底空間 (base space) と呼ばれる．U_i の座標が U_j の座標と重なり合った領域 $U_i \cap U_j$ 上での推移関数によって関係づけられるのと同様に，U_i 上のファイバーは U_j 上のファイバーと重複領域での変換関数 Φ_{ij} で関係づけられる．これは，$\mathcal{E}$ 全体が座標変換の自由性をもつことを反映している．空間 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{M}$ のすべての場所で同じであることは強調してもよいだろう．つまり，パッチごとに $\mathcal{F}$ を変えることはできない．

$\mathcal{F}$ がベクトル空間のとき，$\mathcal{E}$ はベクトル束と呼ばれる．このとき，推移関数は $\mathcal{F}$ の一般線形変換（あるいはその部分集合）で与えられる．$\mathcal{F}$ がリー群 G であれば，束は主束 (principal bundle) と呼ばれる．

束空間の局所切断 (local section) $s(U_i)$ は $\mathcal{F}$ の点を近傍 U_i の各点へ割り当てる規則のことである．言い換えると，$s(U_i): U_i \to \mathcal{F}$ である．これは場 $\phi^i(x)$ の概念とまったく同じものである．

$\mathcal{E} = \mathcal{M} \times \mathcal{F}$ のとき，束は自明であると言われ，この直積構造は $\mathcal{M}$ 上で大域的に成り立つ．この場合，切断は大域的に定義される．実際上は，ファイバーの推移関数 Φ_{ij} を恒等変換に選ぶことができる．一般的な結果として，可縮な空間上のファイバー束は自明である．

ファイバー束の例

1. テンソル束と微分形式の束

多様体の各点における接ベクトル空間を以前に導入した．これをもちいると，n 次元ベクトル空間と n 次元多様体 $\mathcal{M}$ の各近傍 U_i との局所的な直積構造が実際に存在することがわかる．この直積構造は，接ベクトル束 $T\mathcal{M}$ を定義する．(この記号はすでに定義されたものと同じである.) 接ベクトル束の切断はベクトル場を与える．

同様に，余接ベクトル束 $T^*\mathcal{M}$ を導入することができ，この切断は共変ベクトルあるいは 1-形式となる．より一般に，任意の階数をもつテンソル束および高次の微分形式の束を考えることができる．

2. $\mathcal{M}$ 上のスカラー場

例として，複素数を値にもつ場を考えよう．このとき，$\mathcal{E}$ は局所的には $U_i \times \mathbf{C}$ であるので，切断は複素場 $\phi(x)$ であり，これは一般に局所的にしか定義されない．2 つの近傍 U と V を考えると，ϕ_U と ϕ_V を関係づける推移関数 Φ_{UV} が必要となる．そのような推移関数は例えば，位相変換で与えられる．これは，重複領域 $U \cap V$ 上での関係式

$$\phi_U(x) = e^{i\theta_{UV}(x)}\,\phi_V(x) \tag{14.115}$$

に対応している．もしファイバー束が自明であれば，$\mathcal{E} = \mathcal{M} \times \mathbf{C}$ となり，$\phi(x)$ は $\mathcal{M}$ 上で大域的に定義された関数となる．

3. メビウスの帯

これは非自明なファイバー束の最も簡単な例の 1 つである．このとき，$\mathcal{M} =$

S^1, $\mathcal{F} = [-1, 1]$ となる．S^1 を通常の角度座標が $-\epsilon < \theta < \pi + \epsilon$, $\pi - \epsilon < \theta < 2\pi + \epsilon$ となる領域にそれぞれ対応する 2 つの座標パッチ U, V で記述しよう．このとき $R_I = (\pi - \epsilon, \pi + \epsilon)$ と $R_{II} = (-\epsilon, \epsilon)$ の 2 つの重複領域がある．$\mathcal{E}$ は 2 つの近傍 $U \times t_U$, $V \times t_V$ で表される．ただし，t は $\mathcal{F}$ の近傍を示す．変換則は，

$$
\begin{aligned}
t_U &= t_V & &: \text{領域 } R_I \\
t_U &= -t_V & &: \text{領域 } R_{II}
\end{aligned}
\tag{14.116}
$$

ととることができる．U から V へ推移する領域の 1 つで $\mathcal{F}$ の向き付けが変化している．$\mathcal{M}$ の全体への拡張を考えると，一般的な切断 s はある 1 点で特異点をもつことがわかる．なぜなら，左右両側からこの点に近づくと s の値の符号が変化しなければならないためである．したがって，このファイバー束は非自明（かつ向き付け不可能）である．

ファイバー束の接続

ファイバーが N 次元ベクトル空間となる，$\mathcal{M}$ 上のベクトル束を考えよう．この束の切断は $\phi^i(x)$ で表され，N 成分をもつスカラー場とみなせる．厳密に言えば，ϕ^i はある基底ベクトル，例えば $\mathcal{F}$ の基底ベクトル e_i に沿った ϕ の成分であり，このとき $\phi = \phi^i e_i$ となる．この基底 $\{e_i\}$ は $\mathcal{F}$ のフレームを定義する．接ベクトルの場合，すでに見たようにベクトルは $X = \xi^i(x) e_i$ と書け，座標基底をもちいると，

$$
e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}
\tag{14.117}
$$

となる．1-形式の場合も $\omega_i e^i$ と書け，座標基底をもちいると $e^i = dx^i$ となる．成分 ξ^i, ω_i は座標変化のもとで非自明に変換するが，ベクトルと 1-形式自体は不変である．同様に，いま考えているベクトル束の切断を不変な形で書くと $\phi(x) = \phi^i(x) e_i(x)$ となる．一般に，$\mathcal{F}$ のフレームは $\mathcal{M}$ 上の異なる点で違ったものとなる．よって，フレームが多様体 $\mathcal{M}$ 上でどのように変化するのかという疑問がわいてくる．δe_i を座標 x^μ と $x^\mu + \delta x^\mu$ の隣接点でのフレームの差としよう．δe_i は $\{e_i\}$ それ自体で展開できる．また，これは δx^μ に比例するはずである．したがって，

$$\delta e_i = e_j A^j_{\mu i} \delta x^\mu \tag{14.118}$$

と表される．これより，1-形式 $A^j_{\mu i} dx^\mu$ が定義され，これはファイバー束の接続1-形式と呼ばれる．ここで，切断 ϕ の微分は

$$\begin{aligned} d\phi &= de_i \phi^i + e_i d\phi^i \\ &= e_i(\partial_\mu \phi^i + A^i_{\mu j}\,\phi^j)\,dx^\mu \\ &= e_i(D_\mu \phi)^i\,dx^\mu \end{aligned} \tag{14.119}$$

で与えられ，共変微分が現れることがわかる．よって，接続1-形式はゲージポテンシャルとみなせる．これより，ファイバー束からゲージ理論の概念が自然に導かれる．(より一般に，フレームはファイバー空間 $\mathcal{F}$ の座標にも依存する．この場合，底空間とファイバー空間のすべての座標を表す x^A をもちいて $A^i_{Aj} dx^A$ となる．これが束上の接続の一般形となる.）この接続に対する場の強さ F は，ファイバー束の曲率と呼ばれる．

フレームの選択も一意性をもたない．つまり，可逆な線形変換 $e_i \to e'_i = e_k(g^{-1})_{ki}$ を施すことができる．このとき，この変換は成分 $\phi^i \to \phi'^i = g^{ij}\phi^j$ の変化で補われる．変換行列 g は $\mathcal{M}$ 上で一定である必要はない．数学的には，これは ϕ を成分 ϕ^i と基底ベクトル e_i に分解するときにのみ現れるので，ϕ そのものは g による変換に依存しない．局所的な基底の変換が実際に可能であるということは物理的にも予想できる．というのも，もしこれが許されなければ，物理理論が適用できるかどうか想像もつかない何光年も離れた局所的なフレームと現在の我々の局所的なフレームが互いに一致しなければならないことになり，不自然に思われるからである．すなわち，物理的な結果は局所的な基底変換に対して独立でなければならない．これがゲージ不変性の本質であり，変換 $\phi \to \phi' = g\phi$ はゲージ変換を与える．

上の議論はゲージ理論が非常に深い幾何学的な起源をもつことを明らかにしている．ゲージ理論の物理については，すでにある程度詳しく議論した．ファイバー束の概念はこの議論を明確にするとともに，ゲージ場の幾何学的および位相幾何学的な性質を理解するのに有用である．

ファイバー束はすべての物理的な場に対して自然な枠組みを与える．物質場は時空間多様体上のさまざまなベクトル束の切断であり，このときファイ

バーは複素数あるいはローレンツ群のスピノールとなる．ゲージ場はこれらのベクトル束の接続である．この章の始めに議論したように，時空間上の接ベクトル束の接続はクリストッフェル記号（あるいは，スピン接続）を導き，これにより重力理論が得られる．

ファイバー束のホモトピー完全系列

ファイバー束のファイバー，束，底空間についてのホモトピー群を関係づける非常に有用で興味深い手法がある．これは，ホモトピー群の完全系列を使うものであり，関連するホモトピー群の間に成り立つ一連の写像を与える．これを書き出すと

$$\cdots \to \Pi_{k+1}(\mathcal{M}) \to \Pi_k(\mathcal{F}) \to \Pi_k(\mathcal{E}) \to \Pi_k(\mathcal{M}) \to \Pi_{k-1}(\mathcal{F}) \to \cdots \tag{14.120}$$

となる．この系列が完全であるとは，ある特定の写像の核（つまりゼロあるいは自明な要素に写像される要素）が1つ前の写像の像であることを意味する．任意のkに対して，上の系列はファイバー，束，底空間の順序で与えられる．この系列は原理的には無限に続くが，ある部分を取り上げることによって，ホモトピーに関する有用な結果を求めることができる．

このアイデアの簡単な応用例として，12章で自発的対称性の破れを議論した際に，2次元球面がコセット空間 $SU(2)/U(1) = S^3/S^1$ として表せたことを思い出してみよう．これは，$SU(2)$ あるいは S^3 が S^2 上の束で，そのファイバーが $U(1) = S^1$ であると言っても同じことである．$k = 3$ 付近の系列 (14.120) は

$$\to \Pi_3(S^1) \to \Pi_3(S^3) \to \Pi_3(S^2) \to \Pi_2(S^1) \to \tag{14.121}$$

となる．すでに見たように $\Pi_2(S^1) = 0$ である．したがって，$\Pi_3(S^2)$ のすべての要素がゼロに写像される．系列が完全であることから，$\Pi_3(S^2)$ のすべての要素は $\Pi_3(S^3)$ の像でなければならない．さらに，$\Pi_3(S^1)$ がゼロであるので，1つ前の写像から得られる $\Pi_3(S^3)$ の唯一の要素は自明な要素である．1つ前の写像の像で与えられない $\Pi_3(S^3)$ の他の要素は，$\Pi_3(S^2)$ のゼロに写像されることはない．したがって，$\Pi_3(S^3) \to \Pi_3(S^2)$ は1対1写像でなければならない．すでに見たように $\Pi_3(S^3) = \mathbf{Z}$ なので，これより $\Pi_3(S^2) = \mathbf{Z}$

となることがわかる．

もう 1 つの興味深い例は，コセット空間 G/H である．ただし，G は単純連結リー群で，$\Pi_1(G) = 0$ をみたす．このとき $\Pi_2(G) = 0$ でもあるので，$\Pi_2(G/H) = \Pi_1(H)$ が得られる．例えば，$G = SU(n)$, $H = U(n-1)$ と選ぶと，複素射影空間 $\mathbf{CP}^{n-1} = SU(n)/U(n-1)$ が得られる．$\Pi_1(U(n-1)) = \mathbf{Z}$ なので，$\Pi_2(\mathbf{CP}^{n-1}) = \mathbf{Z}$ となることがわかる．完全系列の応用例は他にも多数あり，そのなかには物理的に興味深いものも含まれる．それらについては，今後，機会を見て取り上げてゆく．

14.7　ファイバー束の概念の応用

14.7.1　磁気単極子のまわりのスカラー場

磁気単極子（モノポール）のつくる背景場中の荷電スカラー場を考えよう．この議論では場の動径方向の依存性は重要でないので，$\mathcal{M} = S^2$ としよう．この場はファイバーが $\mathbf{C}$ である束空間の切断で与えられる．このとき北半球で場 ϕ_N，南半球で ϕ_S を考えることができる．この 2 つの半球が交差する領域が赤道である．赤道上の場 ϕ_N と ϕ_S は同じである必要はないが，その差はゲージ変換で与えられる．ゲージ変換のパラメータは前節から $\Lambda(\varphi) = 2g\varphi$ であることがわかる．ただし，φ は経度方向の方位角である．ゲージポテンシャルは Λ による変換を受けるので，荷電場は $\phi_N(\varphi) = e^{ie\Lambda(\varphi)}\,\phi_S(\varphi)$ で関係づけられる必要がある．これは，推移関数 $e^{ie\Lambda(\varphi)}$ がゲージ群 $U(1)$ の要素であることを意味する．$\varphi = 0$ から $\varphi = 2\pi$ で関係式 $\phi_N(\varphi) = e^{ie\Lambda(\varphi)}\,\phi_S(\varphi)$ をもちいて，赤道上の同じ点に戻ってくるとすると，波動関数の一価性から

$$\exp\left[ie\left(\Lambda(2\pi) - \Lambda(0)\right)\right] = 1 \tag{14.122}$$

が要請される．(14.100) の後で与えられた関係式 $\Lambda = 2g\phi$ をもちいると，これは $4\pi eg = 2\pi n$（n は整数）を与える．つまり，

$$eg = \frac{n}{2} \tag{14.123}$$

が成り立つ．磁荷と電荷の積が量子化されなければならない．これは有名なディラックの量子化条件である．これは波動関数の一価性から導けるが，そ

の起源は純粋にトポロジカルであり，ダイナミクスには関係ない．

モノポールの強さ g は $1/2e$ の整数倍で与えられる．したがって，素磁荷 $1/2e$ をもつモノポールを素モノポールとみなせる．また，n は (14.96) の配位となるような素モノポールの数であるとみなせる．

$n \neq 0$ のとき，推移関数を 1 にとれないので，ファイバー束は非自明である．例えば，関係式 $\phi_N(\varphi) = e^{ie\Lambda(\varphi)}\phi_S(\varphi)$ をもちいて，ϕ_N を赤道だけでなく北半球全体で定義してみよう．この関係式を北極に近づけると，関数 $e^{ie\Lambda(\varphi)}$ は $n \neq 0$ のときに特異点をもつことがわかる．したがって，推移関数を 1 にすることはできない．このファイバー束の非自明性は

$$n = \int_{S^2} \frac{eF}{2\pi} \tag{14.124}$$

で測ることができる．

14.7.2 グリボフ問題

ゲージ理論の汎関数量子化におけるゲージ固定とファデーエフ–ポポフの手法に関する議論ですでに見たように，ゲージ理論には一意性についてのグリボフ問題が存在する．この問題は，同じゲージ固定条件に従う異なる場の配位のなかに，互いにゲージ変換で関係づけられるものがあることを示している．これは,「よいゲージ固定」を探すことはできないことを意味する．つまり，どのようなゲージ固定条件を課しても，ゲージ同値であるポテンシャルをもれなく与えるような代表的な配位を 1 つだけ選ぶことはできない．ファイバー束の言葉をもちいると，このグリボフ問題の数学的な特徴を正確に与えることができる．

まず，10 章で定義したゲージ理論に関する概念を復習しよう．$\mathcal{A}$ をゲージポテンシャルの集合とする．つまり，$\mathcal{A}$ はリー代数の値をもつ $\mathbf{R}^4$ 上の 1-形式の集合であり，これらはヤン–ミルズ作用の有限条件をみたすようにとれる．この集合空間上の点は $\mathbf{R}^4$ 上の特定のゲージポテンシャルを与える．さらに，$\mathcal{G}_*$ を 4 次元ユークリッド空間上のゲージ変換の集合とすると，

$$\mathcal{G}_* = \left\{ \sqrt{x^\mu x_\mu} \to \infty \text{ で } g(x) \to 1 \text{ となるすべての } g(x) \right\}$$

となる．境界条件から，この変換はトポロジカルには S^4 上の変換と同じである．ゲージ不変な配位は $\mathcal{C} = \mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ で与えられる．興味のある空間はこれである．$\mathcal{C}$ の近傍は物理的に異なる場の配位で与えられる．$\mathcal{A}$ の配位は $\mathcal{C}$ 上の点である代表的な配位とそれに施されるゲージ変換で与えられる．したがって，$\mathcal{C}$ の任意の近傍に対して，次のような自然な分解を考えることができる．

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} \times \mathcal{G}_*. \tag{14.125}$$

これは，$\mathcal{A}$ が $\mathcal{G}_*$ をファイバーにもつ $\mathcal{C}$ 上のファイバー束の構造をもつことを表している．このファイバー束は自明であるとは限らないので，分解 (14.125) は大域的には成り立たない．

ゲージ固定は次のように考えることができる．ゲージ固定をすると，物理的な配位のすべてに（あるゲージ固定条件をみたすような）代表的なポテンシャル A が選ばれる．よって，物理的な配位 C とそれに関連するゲージ変換 g_C （この変換によって C から A が得られる）が特定されている．このときファイバー上の点，すなわち g_C が $\mathcal{C}$ 上の各点 C に対応している．言い換えると，ゲージ固定はファイバー束 $\mathcal{A}$ の切断を選択することである．切断を大域的に選ぶと，大域的な分解 $\mathcal{A} = \mathcal{C} \times \mathcal{G}_*$ が得られる．このときゲージ固定に問題はなく，グリボフ問題も現れない．したがって，グリボフ問題の存在は，ファイバー束 $(\mathcal{G}_*, \mathcal{A}, \mathcal{C})$ が非自明で，大域的な切断を持たないということと同じである．これより，ゲージポテンシャルがファイバー束としてもつトポロジカルな性質をもちいて，グリボフ問題の正確な特徴が与えられることがわかる．

これまでの議論ではグリボフ問題が存在することは証明されていない．そのためには，ファイバー束 $(\mathcal{G}_*, \mathcal{A}, \mathcal{C})$ が非自明であることを示さなければならない．これには，関与する空間のトポロジーについて知らなければならない．10 章で議論したように，空間 $\mathcal{A}$ は任意の 2 点 $A_{1\mu}(x)$, $A_{2\mu}(x)$ が直線で連結できるという性質をもつ．$\mathcal{A}$ 上のこの直線は

$$A_\mu(\tau, x) = \tau\, A_{1\mu}(x) + (1-\tau)\, A_{2\mu}(x) \tag{14.126}$$

$(0 \le \tau \le 1)$ で与えられる．すべての τ について，線分上の配位 $A_\mu(\tau, x)$ はゲージポテンシャルの変換則に従う．つまり，変換則 $A^g_\mu(\tau, x) = \tau\, A^g_{1\mu}(x) +$

$(1-\tau)\,A^g_{2\mu}(x)$ が成り立つ．よって，$\mathcal{A}$ はアフィン空間である．すなわち，リー代数の値をもつベクトル場 $\xi_\mu(x)$ をもちいて任意の配位を $A_\mu(x) = A^{(0)}_\mu + \xi_\mu$ で表すことができる．これは $\mathcal{A}$ が可縮な空間であることを示している．言い換えると，このホモトピー群は自明である．

$\mathcal{A}$ が大域的に $\mathcal{C} \times \mathcal{G}_*$ の形で書けるとすると，その要素となる空間 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{G}_*$ も可縮でなければならない．よって，グリボフ問題を証明するには，これらの空間が可縮でないことを示し，**背理法**をもちいてファイバー束 $(\mathcal{G}_*, \mathcal{A}, \mathcal{C})$ が自明でないことを言えばよい．

$g(s,x)$ で与えられるゲージ変換が 1 変数 s の変位でどのように変化するか考えよう．ただし，s は実数であり，$s \to \pm\infty$ で $g(s,x) \to 1$ となるとする．これは，始点 $(s=-\infty)$ が恒等変換に対応し，最終的に同じ点に戻ってくる $\mathcal{G}_*$ 上の閉曲線を表している．したがって，そのような閉曲線のホモトピー類は $\Pi_1(\mathcal{G}_*)$ で与えられる．また，写像 $g(s,x)$ を任意の方向の無限遠で g が 1 となる境界条件をみたす $\mathbf{R}^5$ から群 G への写像と考えることもできる．そのような写像は S^5 から G への写像と同じである．よって，この写像のホモトピー類は $\Pi_5(G)$ で与えられる．したがって，$\Pi_1(\mathcal{G}_*) = \Pi_5(G)$ の結果が得られる．すべての $n \geq 3$ に対して $\Pi_5(SU(n)) = \mathbf{Z}$ となるので，これより，$SU(n)$ $(n \geq 3)$ のとき $\mathcal{G}_*$ が可縮でないことが直ちにわかる．よって，そのようなゲージ群に対してグリボフ問題が存在することが示された．ゲージ群が $SU(2)$ のとき，$\Pi_4(SU(2)) = \mathbf{Z}_2$ という結果に同様の議論を適用すると，$\Pi_0(\mathcal{G}_*) = \mathbf{Z}_2$ となる．よって，この群の場合にもグリボフ問題は存在する．

ホモトピー群の完全系列をもちいると，ファイバー束 $(\mathcal{G}_*, \mathcal{A}, \mathcal{C})$ についてさらに興味深いことがわかる．$k=2$ に選ぶと，この系列は

$$\to \Pi_2(\mathcal{A}) \to \Pi_2(\mathcal{C}) \to \Pi_1(\mathcal{G}_*) \to \Pi_1(\mathcal{A}) \to \tag{14.127}$$

で与えられる．$\mathcal{A}$ はホモトピー的に自明であるので，これよりゲージ群 $SU(n)$ $(n \geq 3)$ に対して $\Pi_2(\mathcal{C}) = \mathbf{Z}$ となることがわかる．$SU(2)$ の場合も同様に，$\Pi_1(\mathcal{C}) = \mathbf{Z}_2$ が得られる．

3 次元で同様の解析を行うと，上の議論と同じように，$\Pi_0(\mathcal{G}_*)$ を $\Pi_3(G)$ と関係づけることができる．後者は，$SO(4)$ を除くコンパクト・リー群 G に対して $\mathbf{Z}$（$SO(4)$ の場合は $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$）となるので，このとき $\Pi_1(\mathcal{C}) = \mathbf{Z}$ という

結果が得られる.（$SO(4)$ のときは $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.）ここで，$\mathcal{C}$ は 3 次元ゲージポテンシャルのゲージ不変な配位空間である．また，空間 $\mathcal{C}$ は 4 次元理論で $A_0 = 0$ ゲージをとり，時間を固定したときの配位空間に対応している．これは，ハミルトニアン形式による 4 次元理論の解析に適している．よって，$\Pi_1(\mathcal{C}) = \mathbf{Z}$ という結果はインスタントンの存在と関係している．

14.8　特性類

ディラックのモノポールは非自明なファイバー束の一例である．ファイバー束の非自明性は，実際には，F が閉形式であるが完全形式ではないことに由来する．モノポールを背景場にもつスカラー場の議論においても見たように，ファイバー束の非自明性は $\int F/2\pi$ で測られる．特性類 (characteristic class) はこの概念を一般化したものである．これは，ファイバー束の非自明性を曲率 F（重力の場合はリーマン曲率 $\mathcal{R}$）で構成された微分形式をもちいて測り，特徴づけるものである．トポロジカルな性質にはさまざまなものがあり，それに応じて特性類が数多く存在する．以下では，そのいくつかを紹介しよう．

チャーン類

これは多様体 $\mathcal{M}$ 上の複素ベクトル束に関連する特性類である．F をこの束の曲率とする．このとき，チャーン類は

$$\begin{aligned} c(F) &= \det\left(1 + i\frac{F}{2\pi}\right) \\ &= 1 + c_1(F) + c_2(F) + \cdots \end{aligned} \tag{14.128}$$

で定義される．c_1 は第 1 チャーン類，c_2 は第 2 チャーン類と呼ばれる.（高次の項も同様に呼ばれる.）関係式

$$\begin{aligned} \det(1+iX) &= \exp[\operatorname{Tr}\log(1+iX)] \\ &= 1 + \operatorname{Tr}(iX) + \frac{1}{2}\left[\operatorname{Tr} iX \operatorname{Tr} iX - \operatorname{Tr}(iX)^2\right] + \cdots \end{aligned} \tag{14.129}$$

をもちいると，任意の c_i を計算できる．F はリー代数の値をもつ 2-形式であり，公式 (14.128) の展開式は，ウェッジ積と行列の積の意味での展開であ

る．したがって，

$$c_1(F) = \frac{i}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\,F,$$
$$c_2(F) = \frac{1}{8\pi^2}\left[\mathrm{Tr}(F\wedge F) - (\mathrm{Tr}\,F)\wedge(\mathrm{Tr}\,F)\right] \tag{14.130}$$

となる．$SU(N)$ ゲージ場のとき，$\mathrm{Tr}\,F = 0$ なので，

$$c_2(F) = \frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{Tr}(F\wedge F) \tag{14.131}$$

となる．

群のリー代数に値をもつ任意の X に対して，$\det(1+iX)$ はリー代数のカシミール不変量の生成関数となる．したがって，すべてのチャーン類はリー代数のカシミール不変量に比例すると考えられる．これはヴェイユ準同形として知られている．

チャーン指標

この特性類も複素ベクトル束に関するものである．チャーン指標 (Chern character) $Ch(F)$ は

$$\begin{aligned} Ch(F) &= \mathrm{Tr}\,\exp\left(i\frac{F}{2\pi}\right) \\ &= 1 + Ch_1(F) + Ch_2(F) + \cdots \end{aligned} \tag{14.132}$$

で定義される．$Ch_1(F)$ は $c_1(F)$ と一致する．一方，$Ch_2(F)$ は

$$Ch_2(F) = -c_2(F) + \frac{1}{2}c_1^2 \tag{14.133}$$

となる．

$\hat{A}$-種数

ここではリーマン曲率 2-形式 $\mathcal{R}$ をもつ背景重力場を考える．$\mathcal{R}$ は $2n$ 次元多様体において $SO(2n)$ のリー代数の値をもつ．このとき，$\hat{A}$-種数の生成関数は

$$\hat{A}(\mathcal{R}) = \prod_i \frac{x_i/2}{\sinh x_i/2} \tag{14.134}$$

で与えられる．ここで，x_i は

$$\frac{\mathcal{R}}{2\pi} = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 & \cdots \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & \cdots \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{14.135}$$

で定義される．これは，$\mathcal{R}$ の不変多項式を x_i の積の和で表すことを目的とした表現である．(14.134) を展開して現れる x_i の積の和は，(14.135) をもちいて $\mathcal{R}/2\pi$ のトレースで書き換えられるので，(14.134) はそのようなトレースの関数であると解釈できる．(14.134) を非自明な最低次数の項まで展開すると，

$$\begin{aligned} \hat{A}(\mathcal{R}) &= \prod_i \frac{x_i/2}{\sinh x_i/2} = \prod_i \left(1 - \frac{1}{24}x_i^2 + \cdots\right) \\ &= 1 - \frac{1}{24}\sum_i x_i^2 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{24}\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(\mathcal{R} \wedge \mathcal{R}) + \cdots \end{aligned} \tag{14.136}$$

となる．

オイラー類

オイラー類は奇数次元の多様体ではゼロとなる．偶数次元の多様体 $\mathcal{M}$ では次のように定義される．$(2n \times 2n)$ 実行列 M を考えると，その行列式は完全平方数なので，$\det M = (e)^2$ と書ける．これより，パフィアン $e(M)$ が定義できる．このとき，オイラー類は M に $\mathcal{R}/2\pi$ を代入し，$\mathcal{R}$ のウェッジ積をとることで与えられる．(2×2) 行列の場合，M を次の形にとることができる．

$$M = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}. \tag{14.137}$$

行列式は $\det M = \frac{1}{4}(\epsilon_{ab}M^{ab})^2$ と計算できるので，

$$e(\mathcal{M}) = \frac{1}{4\pi}\epsilon_{ab}\mathcal{R}^{ab} \tag{14.138}$$

となる．4 次元では，

$$M = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{14.139}$$

から始めると，$\det M = (\epsilon_{abcd}M^{ab}M^{cd})^2/64$ となり，

$$e(\mathcal{M}) = \frac{1}{32\pi^2}\epsilon_{abcd}\mathcal{R}^{ab}\mathcal{R}^{cd} \tag{14.140}$$

が得られる．閉じたコンパクト多様体のオイラー数は以前に定義したように

$$\chi(\mathcal{M}) = \sum_k (-1)^k b_k \tag{14.141}$$

となる．ここで，b_k はベッチ数であり，$\mathcal{M}$ の実係数をもつコホモロジー群の次元を表す．ガウス–ボンネの定理によると，オイラー数は $e(\mathcal{M})$ の $\mathcal{M}$ での積分で与えられる．したがって，2 次元と 4 次元の場合，

$$\chi(\mathcal{M}) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\mathcal{M}} \epsilon_{ab}\mathcal{R}^{ab} & (2\text{ 次元}) \\ \\ \dfrac{1}{32\pi^2}\displaystyle\int_{\mathcal{M}} \epsilon_{abcd}\mathcal{R}^{ab}\mathcal{R}^{cd} & (4\text{ 次元}) \end{cases} \tag{14.142}$$

となる．

これ以外にもトッド類やヒルツェブルフ多項式など多くの特性類が存在し，これらは指数定理と量子異常との関連で特に興味深い．本書ではこれらの応用は議論しないので，ここでは紹介しない．

特性類は 2-形式の積で作られた微分形式で構成されている．よって，次元が $2n$ の多様体では，次数が $2n$ を超える微分形式が現れる項は明らかにゼロとなる．特性類に取り込まれたトポロジカルな性質が自然に現れる場合の 1 つとして指数定理がある．この定理は，ディラック演算子のように物理的に興味のある演算子のゼロモードに関する定理であり，これについては 17 章で議論する．

参考文献

1. 本章で取り上げた事項の多くは，数学的な観点からは標準的なものである．ここでは一般的な参考文献をいくつか紹介する．

(a) A.P. Balachandran, *Classical Topology and Quantum States*, World Scientific Pub. Co. (1991).

(b) The mathematical part of R.A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Clarendon Press (1996).

(c) S.S. Chern, *Complex Manifolds without Potential Theory*, Springer-Verlag (1979).

(d) T. Eguchi, P. Gilkey and A. Hanson, Phys. Rep. **66C**, 213 (1980).

(e) S.I. Goldberg, *Curvature and Homology*, Dover Publications, Inc. (1962 & 1982).

(f) C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press (1988).

(g) N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press (1951 & 1995).

(h) Michael Stone, *Mathematics for Physics I & II*, a set of lecture notes, `http://w3.physics.uiuc.edu/~m-stone5/`

2. アインシュタイン方程式は一般相対論の教科書には必ず説明されている．例えば，S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley Text Books (1972) を参照されたい．

3. コホモロジー群とホモトピー群の表は *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, S. Iyanaga and Y. Kawada (eds.), MIT Press (1980) で参照できる．

4. ディラック・モノポールは P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A133**, 60 (1931) による．

5. グリボフ問題は V.N. Gribov, Nucl. Phys. **B139**, 1 (1978) によってその存在が認識された．本章での議論は I.M. Singer, Commun. Math. Phys. **60**, 7 (1978) に基づいている．4 次元スピン多様体についての一般的な議論については T. Killingback and E.J. Rees, Class. Quant. Grav. **4**, 357 (1987) を参照されたい．

第 15 章

経路積分

15.1 時間発展と経路積分

この章では，量子論における経路積分表示の時間発展について考えよう．

状態 $|i\rangle$ が時刻 t' にあるとし，その時間発展を考えよう．これは演算子 $e^{-iH(t-t')}$ で与えられる．つまり，時間発展後の状態を $|\psi\rangle$ で表すと

$$|\psi, t\rangle = e^{-iH(t-t')}\,|i, t'\rangle \tag{15.1}$$

と書ける．ただし，H はハミルトニアンである．スカラー積あるいは重なり積分 $\langle f|\psi, t\rangle$ は，状態 $|i, t'\rangle$ が（相互作用を含む）H によって時間発展し，$|f\rangle$ となる確率振幅を与える．よって，遷移振幅は $\langle f|e^{-iH(t-t')}|i\rangle$ で与えられる．通常，このような遷移は無限の時間間隔で起こると考えられる．つまり，$|i\rangle$ を遠い過去に起こったものとし，$|f\rangle$ の観測あるいは検出をはるか未来になされるものとみなす．これは一般の場合の理想化である．つまり一般に，観測は対象となる相互作用が有効になる以前から行われ，それがすでに有効でなくなった後まで続けられる．この理想化をもちいると，S 行列の要素は

$$S_{fi} = \lim_{t\to\infty} \lim_{t'\to-\infty} \langle f|e^{-iH(t-t')}|i\rangle \tag{15.2}$$

と定義できる．以下では，(15.1) と (15.2) に対する経路積分公式を，まず量子力学系で，さらには一般化された場の理論で導出しよう．

座標と運動量が q_i, p_i $(i = 1, 2, 3)$ で与えられる 3 次元の量子力学系を考えよう．このハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V(q) \tag{15.3}$$

となる.（質量は運動量に吸収されているとする.）この系では，q で対角化された状態 $|q\rangle$ を選ぶことができ，その直交性，完全性は関係式

$$\langle q|q'\rangle = \delta^{(3)}(q-q')\,, \qquad \int |q\rangle\, d^3q\, \langle q| = 1 \tag{15.4}$$

で与えられる. (15.1) と $\langle q|$ のスカラー積をとり，完全性の関係をもちいると，

$$\langle q|\psi, t\rangle \;=\; \int d^3q'\, \langle q|e^{-iH(t-t')}|q'\rangle\langle q'|i, t'\rangle \tag{15.5}$$

を得る．これは，

$$\varPsi(q,t) = \int d^3q'\, K(q,t,q',t')\, \varPsi_i(q',t') \tag{15.6}$$

と表される．ただし，波動関数の定義 $\langle q|\psi, t\rangle = \varPsi(q,t)$, $\langle q'|i\rangle = \varPsi_i(q')$ をもちいた．時間発展の核（カーネル）$K(q,t,q',t')$ は

$$K(q,t,q',t') = \langle q|e^{-iH(t-t')}|q'\rangle \tag{15.7}$$

である．これより明らかに，S 行列の要素は

$$S_{fi} = \lim_{t\to\infty}\ \lim_{t'\to-\infty} \int d^3q d^3q'\ \varPsi_f^*(q) K(q,t,q',t')\, \varPsi_i(q') \tag{15.8}$$

で与えられる．

つぎに，$K(q,t,q',t')$ を経路積分表示で書いてみよう．時間間隔 $(t-t')$ を N ステップに分割しよう．ただし，各ステップの長さが ϵ で，$N\epsilon = t-t'$ をみたすとする．最終的には，$N\epsilon$ を固定し $\epsilon \to 0$, $N \to \infty$ の極限を考える. $t_0 = t'$, $t_N = t$ とし，途中の時刻を t_k とする．また，$t_k - t_{k-1} = \epsilon_k$ と表すこととする．このとき，

$$K(q,t,q',t') = \langle q|e^{-iH\epsilon_N} e^{-iH\epsilon_{N-1}} \cdots e^{-iH\epsilon_1}|q'\rangle \tag{15.9}$$

と書ける．完全性の関係 (15.4) を $e^{-iH\epsilon}$ の因子の間にそれぞれ挿入すると，

$$K(q,t,q',t') = \int d^3q_{N-1} \cdots d^3q_1\, \langle q|e^{-iH\epsilon_N}|q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}|e^{-iH\epsilon_{N-1}}|q_{N-2}\rangle \\ \cdots \langle q_1|e^{-iH\epsilon_1}|q'\rangle \tag{15.10}$$

を得る．これを評価するには，行列要素 $\langle q_k|e^{-iH\epsilon_k}|q_{k-1}\rangle$ が必要となる．この計算が困難である第一の理由は，ハミルトニアンが p と q の両方に依存する項をもち，これらの項がこの行列要素にベキ指数として現れる点にある．そこで，まずこれらを分離することから始めよう．公式 $e^{A+B}=e^Ae^Be^{-\frac{1}{2}[A,B]}\dots$ をもちいると，

$$e^{-i\epsilon(p^2/2+V(q))}=e^{-i\epsilon V(q)}e^{-i\epsilon p^2/2}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2[p^2/2,V(q)]}\dots \tag{15.11}$$

と書ける．省略記号は ϵ^3 のオーダーの項を表している．最終的には ϵ はゼロとなるので，ϵ^2 のオーダーの項は無視できる．上式で ϵ^2 のオーダーの項は，$i\epsilon^2(pF+Fp)/4$ の形をもつ．ただし，$F=-\frac{\partial V}{\partial q}$ は力である．$p\epsilon$ は時間 ϵ の間に粒子が進んだ距離を表すので，この項は，時間 ϵ の間にポテンシャルによって粒子が獲得した運動エネルギーに ϵ をかけたもので概算できる．ほとんどの場合，ポテンシャルは強い特異点をもたないので，これは $\epsilon\to 0$ の極限でゼロとなる．ここでは，この場合について考えよう．(演算子 $Fp+pF$ が発散する行列要素をもつときは例外であり，この議論は修正されなければならない.) ϵ^2 のオーダーの項を無視できるとき，

$$\begin{aligned}\langle q_k|e^{-iH\epsilon_k}|q_{k-1}\rangle &= \langle q_k|e^{-i\epsilon_k V(q)}e^{-i\epsilon_k p^2/2}|q_{k-1}\rangle+\mathcal{O}(\epsilon^2)\\ &= e^{-i\epsilon_k V(q_k)}\langle q_k|e^{-i\epsilon_k p^2/2}|q_{k-1}\rangle+\mathcal{O}(\epsilon_k^2)\end{aligned} \tag{15.12}$$

と表せる．運動量演算子が現れる行列要素は運動量の固有状態の完全系を使って評価できる．

$$\begin{aligned}\langle q_k|e^{-i\epsilon_k p^2/2}|q_{k-1}\rangle &= \int\frac{d^3p_k}{(2\pi)^3}\langle q_k|p_k\rangle\langle p_k|e^{-i\epsilon_k p^2/2}|q_{k-1}\rangle\\ &= \int\frac{d^3p_k}{(2\pi)^3}\,e^{-i\epsilon_k p_k^2/2}\langle q_k|p_k\rangle\langle p_k|q_{k-1}\rangle\\ &= \int\frac{d^3p_k}{(2\pi)^3}\,e^{ip_k(q_k-q_{k-1})}e^{-i\epsilon_k p_k^2/2}.\end{aligned} \tag{15.13}$$

ここで，固有状態の運動量を添え字 k で特定しているが，これは q_k と q_{k-1} の間の行列要素を考えているためである．被積分関数は振動項をもち，積分は ϵ に微小な虚部を与えることで評価できる．言い換えると，積分は

$$\int\frac{d^3p_k}{(2\pi)^3}\,e^{ip_k(q_k-q_{k-1})}e^{-i\epsilon_k p_k^2/2}=\left[\int\frac{d^3p_k}{(2\pi)^3}\,e^{ip_k(q_k-q_{k-1})}e^{-\tilde{\epsilon}_k p_k^2/2}\right]_{\tilde{\epsilon}_k=i\epsilon_k}$$

$$= \left[\frac{1}{(2\pi\tilde{\epsilon}_k)^{\frac{3}{2}}} e^{-(q_k - q_{k-1})^2/2\tilde{\epsilon}_k} \right]_{\tilde{\epsilon}_k = i\epsilon_k}$$
$$= \frac{1}{(2\pi i\epsilon_k)^{\frac{3}{2}}} e^{i(q_k - q_{k-1})^2/2\epsilon_k} \tag{15.14}$$

と定義できる．

q の各時刻での値を $q(t') \equiv q_0 = q'$, $q(t_1) \equiv q_1, \ldots, q(t_k) \equiv q_k, \ldots, q(t) \equiv q_N = q$ と特定して経路 $q(t)$ を定義しよう．これは線分の連続によって定義されているので，一般に連続的である．$\epsilon_k \to 0$ の極限で，$(q_k - q_{k-1})/\epsilon_k$ の量は速度あるいは経路の接線を与える．これを $\dot{q}_k$ で表すと，

$$\langle q_k | e^{-iH\epsilon_k} | q_{k-1} \rangle = \frac{1}{(2\pi i\epsilon_k)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[i \left(\frac{1}{2}\dot{q}_k^2 - V(q_k) \right) \epsilon_k \right] \tag{15.15}$$

と書ける．この結果を (15.10) にもちいて，$\mathcal{O}(\epsilon^2)$ の項を無視した効果を取り除くために $\epsilon \to 0$ の極限をとると

$$K(q,t,q',t') = \lim_{N\to\infty, \epsilon\to 0} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d^3 q_k}{(2\pi i\epsilon_{k+1})^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2\pi i(t_1 - t'))^{\frac{3}{2}}} \times e^{i\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\dot{q}_k^2 - V(q_{k-1})\right]\epsilon_k}$$
$$= \lim_{N\to\infty, \epsilon\to 0} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d^3 q_k}{(2\pi i\epsilon_{k+1})^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2\pi i(t_1 - t'))^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathcal{S}[q,t,q',t']} \tag{15.16}$$

となる．ただし，

$$\mathcal{S}[q,t,q',t'] = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{1}{2}\dot{q}_k^2 - V(q_k) \right] \epsilon_k$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{(q_k - q_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})} - V(q_k)(t_k - t_{k-1}) \right] \tag{15.17}$$

と定義した．これは次のように解釈できる．q_k の値で与えられた $q(t)$ は，時間 $(t-t')$ で q' から q へ移る経路を定義する．$q_k = q(t_k)$ が変化すると，異なる経路が定義される．したがって，すべての q_k で積分することは，時間間隔 $(t-t')$ で q' と q を結ぶすべての経路にわたる和あるいは積分をとることと同じである．それぞれの経路の重み因子（あるいは振幅）は $\exp(iS[q,t,q',t'])$

である．$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ はハミルトニアン $H = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$ に対応するラグランジアンであるので，$S[q,t,q',t']$ は (q',t') と (q,t) を結ぶ特定の経路の古典的な作用である．(15.17) の和は，離散的な計算法をもちいると，$\int dt\mathcal{L}$ の積分を評価したものであると考えられる．e^{iS_P} を経路 P に沿って (q',t') から (q,t) へ進む粒子の振幅と定義しよう．S_P はこの経路に対応する古典的な作用である．このとき，(15.16) から，時刻 t' に q' にある粒子が時刻 t に q に移る全振幅は，すべての経路について，個々の振幅 e^{iS_P} の和（あるいは積分）をとったもので与えられることがわかる．すべての経路の総和あるいは積分は離散化の手法をもちいて定義され，次の積分測度

$$[\mathcal{D}q] = \lim_{N\to\infty,\epsilon\to 0} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{d^3 q_k}{(2\pi i\epsilon_{k+1})^{\frac{3}{2}}} \tag{15.18}$$

をもつ．振幅が振動項をもつので，すべての経路にわたる積分は虚数時間で定義されなければならない．最終的な結果は実時間に解析接続して得られる．すなわち，

$$\int [\mathcal{D}q] e^{iS[q,t,q',t']} = \left[\int [\mathcal{D}q] e^{-S_E(q,\tau,q',\tau')}\right]_{\tau=it} \tag{15.19}$$

と表せる．ここで，S_E はユークリッド作用あるいは虚数時間の作用であり，

$$S_E = \int d\tau \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right] \tag{15.20}$$

で定義される．

15.2 シュレーディンガー方程式

3 次元の点粒子の場合，経路積分は

$$\Psi(q_N, t_N) = \int \prod_{i=0}^{N-1} \frac{d^3 q_{N-i-1}}{[2\pi i(t_{N-i} - t_{N-i-1})]^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathcal{S}}\ \Psi(q_0, t_0) \tag{15.21}$$

を与える．ただし，

$$\mathcal{S} = \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{(q_{N-i} - q_{N-i-1})^2}{2(t_{N-i} - t_{N-i-1})} - V(q_{N-i})(t_{N-i} - t_{N-i-1})\right] \tag{15.22}$$

である．(15.21) の微分は

$$i\frac{\partial \Psi(q_N,t_N)}{\partial t_N} = \int\left[\frac{1}{2}\left(\frac{q_N-q_{N-1}}{t_N-t_{N-1}}\right)^2+V(q_N)\right]e^{iS}\,\Psi(q_0,t_0) - i\frac{3}{2}\frac{1}{(t_N-t_{N-1})}\Psi(q_N,t_N) \tag{15.23}$$

となる．また，(15.21) から

$$\frac{\partial \Psi(q_N,t_N)}{\partial q_N^i} = \int i\frac{(q_N-q_{N-1})^i}{(t_N-t_{N-1})}e^{iS}\,\Psi(q_0,t_0) - i(t_N-t_{N-1})\frac{\partial V}{\partial q_N^i}\Psi(q_N,t_N) \tag{15.24}$$

を得る．もう一度，微分を施すと

$$\frac{\partial^2 \Psi(q_N,t_N)}{\partial q_N^2} = i\frac{3}{(t_N-t_{N-1})}\Psi(q_N,t_N) - \int\frac{(q_N-q_{N-1})^2}{(t_N-t_{N-1})^2}e^{iS}\,\Psi(q_0,t_0) - i(t_N-t_{N-1})\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_N^2}\Psi(q_N,t_N)+\frac{\partial V}{\partial q_N}\frac{\partial \Psi(q_N,t_N)}{\partial q_N}\right] + (q_N-q_{N-1})^i\frac{\partial V}{\partial q_N^i}e^{iS}\,\Psi(q_0,t_0) \tag{15.25}$$

となる．(15.23) と (15.25) を比較すると，$(t_N-t_{N-1})\to 0$ の極限で

$$i\frac{\partial \Psi(q_N,t_N)}{\partial t_N} = \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_N^2}+V(q_N)\right]\Psi(q_N,t_N) \tag{15.26}$$

となる．したがって，経路積分で定義された波動関数は，予想されたことではあるが，シュレーディンガー方程式をみたす．

15.3　場の理論への一般化

この節では，経路積分を場の理論へ拡張する．次のラグランジアンで記述されるスカラー場の理論を考えよう．

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}^2-(\nabla\varphi)^2-m^2\varphi^2\right]-V(\varphi). \tag{15.27}$$

このとき，

$$\pi \equiv \dot{\phi}, \tag{15.28}$$

$$\mathcal{H} \equiv \int d^3x\ (\pi\dot{\phi} - \mathcal{L})$$
$$= \int d^3x\ \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi)\right] \tag{15.29}$$

となる．ただし，ϕ は φ に対応する演算子である．この理論を多粒子的な解釈で議論した際に，展開式[1]

$$\phi(x) = \sum_k [a_k u_k(x) + a_k^\dagger u_k^*(x)] \tag{15.30}$$

をもちいた．ただし，$u_k(x) = e^{-ikx}/\sqrt{2\omega_k V}$, $kx = k_0 t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = \omega_k t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$, $\omega_k = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$ である．この関係式は逆に

$$\begin{aligned} a_k &= i\int d^3x\ [u_k^*(x)\partial_0\phi(x) - (\partial_0 u_k^*)\phi(x)] \\ &\equiv i\int d^3x\ \left[u_k^*(x)\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x)\right], \\ a_k^\dagger &= -i\int d^3x\ [u_k(x)\partial_0\phi(x) - (\partial_0 u_k)\phi(x)] \\ &\equiv -i\int d^3x\ \left[u_k(x)\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x)\right] \end{aligned} \tag{15.31}$$

と変形できる．ただし，積分は固定時間で行われる．

ある選ばれた時刻での場の演算子 ϕ の固有状態 $|\varphi\rangle$ を定義してみよう．このために，まず自由場の理論を考える．時刻 $t=0$ で，

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \int d^3x\ \frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, \varphi(x), \\ \pi_k &= \int d^3x\ \frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, \pi(x) \end{aligned} \tag{15.32}$$

と定義する．正準交換関係はフーリエ成分 (15.32) をもちいて，

$$\begin{aligned} [\varphi_k, \varphi_l] &= 0, \\ [\pi_k, \pi_l] &= 0, \\ [\varphi_k, \pi_l] &= i\,\delta_{k+l,0} \end{aligned} \tag{15.33}$$

と表される．数え上げることができる無限の力学変数を φ_k, π_k とすると，こ

[1] ［訳註］2 章の議論を参照されたい．

の交換関係は通常の量子力学と類似している．ただし，φ_k は座標に対応する変数，π_k は正準共役な運動量である．φ_k はそれ自身と可換であるので，φ_k を対角化する状態を定義できる．そこで，(15.31) に戻ると，

$$\begin{aligned} a_k &= i(\pi_k - i\omega_k\varphi_k), \\ a_k^\dagger &= -i(\pi_{-k} + i\omega_k\varphi_{-k}) \end{aligned} \tag{15.34}$$

となることがわかる．φ_k の対角化は $(a_k + a_k^\dagger)$ の対角化と同じであり，これは粒子数演算子 $a_k a_k^\dagger$ の対角化とは異なる．多粒子状態も自由場のハミルトニアンの固有状態であり，φ_k を対角化する波動関数をもちいて表示できる．例えば，運動量が k_1 の n_1 粒子，運動量が k_2 の n_2 粒子，等々の状態の波動関数は

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1,n_2,\ldots,n_r}[\varphi] &= \langle\varphi|n_1,k_1,n_2,k_2,\ldots,n_r,k_r\rangle \\ &= \langle\varphi|\frac{{a_{k_1}^\dagger}^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\frac{{a_{k_2}^\dagger}^{n_2}}{\sqrt{n_2!}}\cdots\frac{{a_{k_r}^\dagger}^{n_r}}{\sqrt{n_r!}}|0\rangle \end{aligned} \tag{15.35}$$

と表示できる．そのような波動関数に対して，π_k は微分演算子として作用する．交換関係 (15.33) から，

$$\pi_k\,\Psi[\varphi] = -i\frac{\delta}{\delta\varphi_{-k}}\,\Psi[\varphi] \tag{15.36}$$

となることがわかる．基底状態の波動関数は $a_k\,\Psi_0[\varphi] = 0$ をみたすので，これは

$$\left[\frac{\partial}{\partial\varphi_{-k}} + \omega_k\varphi_k\right]\Psi_0[\varphi] = 0 \tag{15.37}$$

と書き換えられる．量子力学における調和振動子の場合と同様に，これを解くと

$$\begin{aligned} \Psi_0[\varphi] &= \mathcal{N}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_k \omega_k\varphi_k\varphi_{-k}\right] \\ &= \mathcal{N}\exp\left[-\frac{1}{2}\int d^3x d^3y\ \varphi(x)\Omega(x,y)\varphi(y)\right], \\ \Omega(x,y) &= \frac{1}{V}\sum_k \omega_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}, \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \varphi_{\boldsymbol{k}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{15.38}$$

を得る．ここで，$\mathcal{N}$ は規格化定数である．調和振動子の基底状態の波動関数をそれぞれの $\boldsymbol{k}$ について 1 回ずつ，無限回かけ合わせたものが $\varPsi_0$ である．この結果は，ハミルトニアンを $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ と $\pi_{\boldsymbol{k}}$ で表したのちに，シュレーディンガー方程式を解いて導出することもできる．

無限の数の量子力学系が合わさって場の理論が作られるので，状態 $|\varphi\rangle$ が与えられると直ちに

$$\varPsi[\varphi, t] = \int [d\varphi]\ e^{i\mathcal{S}(\varphi,t,\varphi',t')}\ \varPsi_i[\varphi', t'] \tag{15.39}$$

が得られる．ただし，

$$[d\varphi] = \prod_{\boldsymbol{k}} \lim_{N\to\infty} \prod_{\alpha=0}^{N-1} \frac{d\varphi_{\boldsymbol{k}}^{\alpha}}{\sqrt{(2\pi i \epsilon_{\alpha+1})}} \tag{15.40}$$

である．作用 $\mathcal{S}(\varphi, t, \varphi', t')$ は古典的な作用 $\int dt d^3x\, \mathcal{L}(\varphi, d\varphi)$ であり，$\varphi(\boldsymbol{x}, t') = \varphi'(\boldsymbol{x})$ と $\varphi(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(\boldsymbol{x})$ をみたす $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ で評価される．これは時間間隔を N 分割した離散化として解釈され，最終的には $N \to \infty$ とする．したがって，作用を定義する時間積分は和で置き換えられる．以前と同様に，積分は適切に解析接続されたユークリッド積分で定義される．S 行列の要素は，全体の規格化定数を除いて，

$$S_{fi} = \lim_{t\to\infty,\, t'\to-\infty} \int [d\varphi]\, \varPsi_f^*[\varphi, t]\, \varPsi_i[\varphi', t']\, e^{i\mathcal{S}(\varphi,t,\varphi',t')} \tag{15.41}$$

と表される．つぎに，これを簡約公式の形で書き換えてみよう．入射粒子の運動量が $k_1, k_2, \ldots, k_N$，散乱粒子の運動量が $p_1, p_2, \ldots, p_M$ となる過程を考えると，(15.35) から，始状態の波動関数は

$$\begin{aligned}
\varPsi_i[\varphi] &= \langle\varphi| a_{k_1}^{\dagger} a_{k_2}^{\dagger} \cdots a_{k_N}^{\dagger} |0\rangle \\
&= \int d^3x_1 \cdots d^3x_N \left[-iu_{k_1}(x_1) \overleftrightarrow{\partial}_{01}\right] \cdots \left[-iu_{k_N}(x_N) \overleftrightarrow{\partial}_{0N}\right] \\
&\qquad\qquad \times \langle\varphi|\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_N)|0\rangle \\
&= \int \prod_{1}^{N} \left[-iu_{k_i}(x_i) \overleftrightarrow{\partial}_{0i} \varphi(x_i)\right]\ \varPsi_0[\varphi]
\end{aligned} \tag{15.42}$$

となる．ただし，(15.31) および $\langle\varphi|\phi = \langle\varphi|\varphi$ となることをもちいた．終状態の波動関数も同様に書けるので，

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \int \prod \left[i u^*_{p_j}(y_j) \overleftrightarrow{\partial}_{0j} \right] \left[-i u_{k_i}(x_i) \overleftrightarrow{\partial}_{0i} \right] \int [d\varphi]\, \Psi_0^* \Psi_0 \\ &\qquad\qquad \times \varphi(y_1)\cdots\varphi(y_M)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N)\, e^{i\mathcal{S}(\varphi)} \\ &= \int \left[\prod_1^M i u^*_{p_j}(y_j) \overleftrightarrow{\partial}_{0j} \prod_1^N -i u_{k_i}(x_i) \overleftrightarrow{\partial}_{0i} \right] \\ &\qquad\qquad G(y_1, y_2, \ldots y_M, x_1, x_2, \ldots x_N) \end{aligned} \tag{15.43}$$

となることがわかる．この公式では最終的に $y_j^0 \to \infty$, $x_i^0 \to -\infty$ ととると考えている．グリーン関数は

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \int [d\varphi]\, \Psi_0^*[\varphi]\, \Psi_0[\varphi]\, e^{i\mathcal{S}(\varphi)}\, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_N) \tag{15.44}$$

と定義されている．(15.43) に現れるグリーン関数は次のように頂点関数をもちいて定義される．

$$\begin{aligned} &G(y_1, y_2, \ldots, y_M, x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ &\quad = \int d^4y'_1 \cdots d^4x'_N\; G(y_1, y'_1)\cdots G(x_N, x'_N) V(y'_1, \ldots, x'_N). \end{aligned} \tag{15.45}$$

ここで，$G(y_1, y'_1)$ などは 2 点グリーン関数，あるいは伝播関数である．頂点関数は相互作用を受ける領域付近で定義できる．遠い過去と遠い未来で相互作用を無視できると仮定すると，最終的に $y_j^0 \to \infty$, $x_i^0 \to -\infty$ となることをもちいて，

$$\begin{aligned} G(y_1, y'_1) &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(y_1 - y'_1)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{-ik(y_1 - y'_1)} \\ &= \sum_k u_k(y_1) u_k^*(y'_1) \qquad (y_1^0 > y_1'^0), \\ G(x_1, x'_1) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{ik(x_1 - x'_1)} \end{aligned}$$

$$= \sum_k u_k^*(x_1)u_k(x_1') \qquad (x_1^0 < x_1'^0) \tag{15.46}$$

と書ける．公式 (15.45), (15.46) を使って (15.43) を変形しよう．積分の変形は

$$\int d^3y u_p^*(y)\, i\overleftrightarrow{\partial}_0 \sum_k u_k(y)u_k^*(y') = u_p^*(y') \tag{15.47}$$

をもちいて実行できる．これより，最終的な結果は

$$S_{fi} = \int d^4y_1' \cdots d^4x_N' \prod \left[u_{p_j}^*(y_j')u_{k_i}(x_i')\right] V(y_1', \ldots, x_N') \tag{15.48}$$

となる．伝播関数は $i(\Box + m^2)G(x,y) = \delta^{(4)}(x-y)$ をみたすので，

$$\prod_i i(\Box_i + m^2)G(x_1, \ldots, x_N) = V(x_1, \ldots, x_N) \tag{15.49}$$

となる．したがって，S 行列の要素を簡約公式[2]

$$S_{fi} = \prod_1^M iu_{p_j}^*(y_j)(\Box_j + m^2) \prod_1^N iu_{k_i}(x_i)(\Box_i + m^2)$$
$$G(y_1, \ldots, y_M, x_1, \ldots, x_N) \tag{15.50}$$

で表すことができる．ここで，グリーン関数 G は (15.44) で与えられる．（もちろん，G はユークリッド空間で評価されたのちにミンコフスキー空間へ解析接続されるものとする．また，全体の規格化因子は $\langle 0|S|0\rangle = 1$ を要請することで決定できる．）

汎関数積分と繰り込みの議論で述べたように，このような枠組みでは，繰り込まれた場と繰り込み因子 Z で作用を書き換えて計算を実行しなければならない．よって，作用は

$$\mathcal{S} = \int Z_3 \left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + (m^2 - \delta m^2)\varphi^2\right] + Z_1\lambda\varphi^4 \tag{15.51}$$

の形に書ける．ただし，繰り込み定数 Z_1, Z_3, δm^2 は，短距離カットオフがゼロになる極限で発散する可能性のある項を除くことによって決定される定数である．(15.51) は特別な相互作用項についての場合だが，より一般的には，場の単項式の 1 つ 1 つについて，独立した Z 因子が必要となる．

---

2 ［訳註］S 行列の簡約公式については 5.1 節を参照されたい．

15.4 経路積分の解釈

時刻が一定の場の配位 $\varphi(x)$ は配位空間 $\mathcal{C}$ を成す．つまり，

$$\mathcal{C} = \left\{\text{すべての}\ \varphi(\boldsymbol{x}) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}\right\} \tag{15.52}$$

である．$\mathcal{C}$ の各点はすべての空間的な点 $\boldsymbol{x}$ についての場の配位 $\varphi(\boldsymbol{x})$ を与える．波動関数 $\Psi[\varphi]$ は $\mathcal{C}$ の各点で複素数である．時刻 t が変化すると，$\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ は $\mathcal{C}$ 上の経路を与える．したがって，式 (15.39) は

$$\Psi[\varphi, t] = \sum_{\text{すべての経路}\ P} e^{i\mathcal{S}_P[\varphi]}\ \Psi[\varphi', t'] \tag{15.53}$$

と解釈できる．ここで，$\mathcal{S}[\varphi]$ は時刻 t' の $\varphi'(\boldsymbol{x})$ と時刻 t の $\varphi(\boldsymbol{x})$ を結ぶ $\mathcal{C}$ 上の経路 P に対する作用である．基本的にこの結果は波動光学におけるホイヘンスの原理と同じである．唯一の違いは，ここでは経路が時空間ではなく配位空間 $\mathcal{C}$ で定義されている点である．

つぎに，経路積分の位相幾何学的な側面について考えよう．これまでの結果を要約すると，基本的な経路積分は

$$\Psi[Q, t] = \int [dQ]\, e^{i\mathcal{S}[Q,t,Q',t']}\, \Psi_i[Q', t'] \tag{15.54}$$

と書ける．ただし，Q は配位空間 $\mathcal{C}$ の特定の点を表し，積分は時刻 t' の点 Q' と時刻 t の点 Q を結ぶすべての経路についてとるものとする．時間変数 t は経路のパラメータである．配位空間 $\mathcal{C}$ が非自明なトポロジーをもつとき，量子論を定義する際に多くの微妙な問題が生じる．特に興味深い 2 つの場合として，$\mathcal{C}$ の基本群つまり $\Pi_1(\mathcal{C})$ が非自明な場合と，3 次元体積の境界で表せない 2 次元の閉曲面が $\mathcal{C}$ 上にあり，閉形式ではあるが完全形式でない 2-形式が存在する場合，つまり $\mathcal{H}^2(\mathcal{C}) \neq 0$ となる場合がある．以下ではこの 2 つの場合について考えよう．

15.5 配位空間 $\mathcal{C}$ が非自明な基本群をもつ場合

前章で議論したように，$\mathcal{C}$ が非自明な基本群をもつ最も簡単な例は，2 次元平面から 1 点（例えば原点）を除いた空間上での粒子の運動で与えられる．

このとき $\Pi_1(\mathbf{R}^2 - \{0\}) = \mathbf{Z}$ であり，閉曲線 C の非自明性は巻き数

$$\nu(C) = -\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{\epsilon_{ij}x^j}{x^2}dx^i = \oint_C \alpha, \qquad \alpha = -\frac{1}{2\pi}\frac{\epsilon_{ij}x^j}{x^2}dx^i \tag{15.55}$$

で測ることができる．α は閉 1-形式なので，互いにホモトピックな 2 つの開経路 P, P' に対して

$$\int_P \alpha = \int_{P'} \alpha \tag{15.56}$$

となる．

経路の構造と巻き数が与えられると，経路積分を

$$\Psi(x,t) = \int [dx]\, e^{i\mathcal{S}(x,t,x',t')}\, e^{i\theta\int_{x'}^{x}\alpha}\, \Psi(x',t') \tag{15.57}$$

と一般化することができる．ここで，θ は任意のパラメータである．x' から x への一般的な経路は $P + C_\nu$ と表すことができる．ここで，P は原点のまわりに非可縮なループをもたない開経路である．また，C_ν は原点のまわりのループで，その巻き数は ν である．これより，明らかに

$$\int_{P+C_\nu} \alpha = \nu + \int_P \alpha \tag{15.58}$$

が成り立つ．したがって，経路積分 (15.57) は

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \left[\sum_{\substack{\text{すべての}\\ \tilde{P}\sim P}} e^{i\mathcal{S}_{\tilde{P}}+i\theta\int_P\alpha} + \sum_{\substack{\text{すべての}\\ \tilde{P}\sim P+C_1}} e^{i\mathcal{S}_{\tilde{P}}+i\theta\int_P\alpha+i\theta} + \cdots\right]\Psi(x',t') \\ &= \sum_\nu \sum_{\substack{\text{すべての}\\ \tilde{P}\sim P+C_\nu}} e^{i\mathcal{S}_{\tilde{P}}+i\theta\int_P\alpha+i\nu\theta}\,\Psi(t')\end{aligned} \tag{15.59}$$

と書ける．和は，ν の各値に対して，$P + C_\nu$ とホモトピックなすべての経路 $\tilde{P}$ についてとる．全体の位相 $\exp(i\int_P \alpha)$ は行列要素には関係ないので，

$$\Psi(x,t) = \sum_\nu \sum_{\substack{\text{すべての}\\ \tilde{P}\sim P+C_\nu}} e^{i\mathcal{S}_{\tilde{P}}+i\nu\theta}\,\Psi(x',t') \tag{15.60}$$

となる．ν は整数なので，Ψ は $\theta \to \theta + 2\pi$ のもとで変化しないことがわか

る．よって，このパラメータ θ は $[0,2\pi]$ の間に値をとる．

経路積分では，$\hbar$ は $\mathcal{S}/\hbar$ にベキ指数として現れる．$\theta\nu(C)$ の項は $\hbar$ を含まない．これは，θ がゼロと 2π の間の任意の値をとり，$\nu(C)$ は整数に規格化されることから明らかであろう．したがって，$\theta\nu$ 項は古典的な効果をもたない．θ は，$\Pi_1(\mathcal{C}) \neq 0$ のときに理論を量子化すると現れる（古典的な作用には現れない）付加的なパラメータであるとみなせる．$\theta\nu$ の効果を作用で表すと，

$$\mathcal{S} = \int dt\, \mathcal{L} - \hbar \frac{\theta}{2\pi} \int dt\ \epsilon_{ij} \frac{\dot{x}^i x^j}{x^2} \tag{15.61}$$

と書ける．付加的な「トポロジカル」項は，$\hbar$ を明示的に含むことがわかる．（これはまた $x=0$ で特異点をもつ．よって，この項が意味を成すためにも原点 $x=0$ は除かれなければならない．）

一般に，$\Pi_1(\mathcal{C})$ は $\mathbf{Z}$ 以外の値にもなる．このとき，上の構成法を一般化すると次のようになる．経路積分の構成に際し $e^{i\mathcal{S}}$ に加えて，閉曲線 C に関する因子 $K(C)$ を含める．ただし，$K(C)$ は次の性質をもつ．

1. $K(C+\delta C) = K(C)$
2. $K(C_1)K(C_2) = K(C_1 + C_2)$
3. $K(-C) = K^*(C)$

1 番目の性質は，曲線 C の微小変形のもとで $K(C)$ が不変であることを意味する．すなわち，$K(C)$ は経路のトポロジカル不変量である．2 番目の性質は，経路の合成則を与える．また，3 番目の性質は $K(C)$ が位相であり，向き付けの変化によって符号が変わることを示している．これらの性質はすべてこれまでの議論から簡単に導くことができる．まとめると，これらの性質は $K(C)$ が $\Pi_1(\mathcal{C})$ 群の 1 次元ユニタリー表現であることを示している．$K(C)$ は（θ のような）新しいパラメータを与える可能性がある．そのようなパラメータは，非自明な $\Pi_1(\mathcal{C})$ のもとで理論を量子化する際に現れる付加的なパラメータである．これらは，古典的なラグランジアンに現れる結合定数とは別の新しい結合定数とみなせる．量子論において，これらのパラメータがどのような値をとるのかは，実験的に決定されなければならない．

以上より，量子化の規則は次のように表すことができる．

$$\Psi(Q,t) = \int [dQ']\, e^{i\mathcal{S}(Q,t,Q',t')}\, K(C)\, \Psi(Q',t'). \tag{15.62}$$

ここで，Q は配位空間の座標を表す．この種のトポロジカルな特徴が重要である例として，以下の場合がある．

1. 磁気渦 (magnetic vortex) 存在下での荷電粒子の動力学.
2. 2 次元空間で分数のスピン・統計をもつ粒子．このとき θ は $[-\pi,\pi]$ の間に値をとり，$\theta=0$ はボソンに対応し，$\theta=\pi$ または $-\pi$ はフェルミオンを与える．これら以外の値のときは,「エニオン（anyon，任意の統計をもつ粒子[3])」が与えられる.
3. 量子色力学 (QCD)．配位空間 $\mathcal{C}$ は単純連結でなく，実際には $\Pi_1(\mathcal{C}) = \mathbf{Z}$ である．このため，色力学の汎関数積分に追加項 $\theta\nu[A]$ が現れる．$\mathcal{C}$ 上の経路の非自明性を表す $\nu[A]$ はインスタントン数である.

15.6 $\mathcal{H}^2(\mathcal{C}) \neq 0$ の場合

つぎに，量子化におけるもう 1 つの問題，つまり配位空間が非可縮な 2 次元曲面をもつ場合の量子化について考えよう．この典型例は，2 次元曲面上の粒子の運動で与えられる．経路積分は

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= \int [dx]\, W(P,x,x')\, \Psi(x',t'), \\ W(P,x,x') &= e^{i\mathcal{S}_P(x,x')} \end{aligned} \tag{15.63}$$

となる．ここで，$e^{i\mathcal{S}_P}$ は次のように解釈できる．x' と x の間のすべての経路 P に対して，$e^{i\mathcal{S}_P}$ は絶対値が 1 となる複素数を与える．つまり，

$$W(P,x,x') = e^{i\mathcal{S}_P(x,x')} : \text{経路の集合} \to U(1) \tag{15.64}$$

となる．経路積分の和は，この因子 $e^{i\mathcal{S}}$ を各経路の重み係数としてすべての経路についての和を表す．ここで議論する新しいアイデアは，経路積分の重み係数を経路に直接関係づけるのではなく，曲面に関係づけようというものである．これは次のように行うことができる．2 点 x' と x の間の特定の経

[3] ［訳註］エニオンについては，20.6.5 節および上巻の付録も参照されたい.

路を選び，それを基準経路 P_0 としよう．対象となる経路は P である．このとき，$P-P_0$ は閉じたループとなり，境界が $P-P_0$ で与えられる曲面 Σ を考えることができる．(2 次元球面上では，このような曲面は常に存在する．より一般に，このような曲面が存在する場合は以下の議論が成り立つ．ただし $P-P_0$ が曲面の境界でないとき，この議論は修正されなければならない．) 経路を与える座標 $x^\mu(t)$ は $x^\mu(\sigma,t)=x^\mu(\xi)$ と一般化できる．ここで，$\xi^i=(\sigma,t)$ は曲面 Σ のパラメータである．曲面 Σ の面積要素は $\frac{1}{2}\partial_i x^\mu \partial_j x^\nu \epsilon^{ij}$ $(i,j=1,2,\ \xi_1=t,\ \xi_2=\sigma)$ と書ける．よって，経路 P に関する重み因子は

$$
\begin{aligned}
W(P,x,x') &= e^{i\mathcal{S}_P(x,x')}\, e^{i\Gamma(\Sigma)}, \\
\Gamma(\Sigma) &= k\int_\Sigma d^2\xi\ \frac{1}{2} B_{\mu\nu}\partial_i x^\mu \partial_j x^\nu \epsilon^{ij}
\end{aligned}
\tag{15.65}
$$

と一般化できる．ただし，$B_{\mu\nu}$ は x^μ の関数つまり $B_{\mu\nu}=B_{\mu\nu}(x)$ である．またこれは添え字について反対称 $B_{\mu\nu}=-B_{\nu\mu}$ である．

このような項は多くの整合性の条件をみたす必要がある．以下ではそれを見ていこう．まず，新しい項を作用への追加項とみなす．重み因子 (15.65) を定義するには，曲面 Σ あるいは $x^\mu(\sigma,t)$ が必要となる．$x^\mu(t)$ は経路を定義するが，変数 σ は物理的な意味をもたないパラメータである．よって，(15.65) の項の性質として，まず x^μ の σ 依存性が物理と無関係であることが言える．あるいは，$P-P_0$ を境界とする曲面は多数存在することに注意しよう．このとき，そのような曲面のどれを選んで (15.65) を定義しても，物理的には同じはずである．異なる曲面を選択することは，x^μ の汎関数としての σ 依存性が異なることに対応づけられる．したがって，$\Gamma(\Sigma)$ は Σ の微小変形あるいは $x^\mu(\xi)$ の微小変化のもとで不変でなければならない．$\Gamma(\Sigma)$ の変分は

$$
\begin{aligned}
\delta\Gamma &= \frac{k}{2}\int_\Sigma d^2\xi \Big[\partial_\alpha B_{\mu\nu}\delta x^\alpha \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu \epsilon^{ij} \\
&\qquad + B_{\mu\nu}\partial_i(\delta x^\mu)\partial_j x^\nu \epsilon^{ij} + B_{\mu\nu}\partial_i x^\mu \partial_j(\delta x^\nu)\epsilon^{ij}\Big] \\
&= \frac{k}{2}\int_\Sigma d^2\xi\ [\partial_\alpha B_{\mu\nu}+\partial_\mu B_{\nu\alpha}+\partial_\nu B_{\alpha\mu}]\,\partial_i x^\mu \partial_j x^\nu \epsilon^{ij}\delta x^\alpha \\
&\qquad + k\oint_{\partial\Sigma} d\xi_i B_{\mu\nu}\partial_j x^\nu \epsilon^{ij}\delta x^\mu
\end{aligned}
\tag{15.66}
$$

となる．

第 1 項は x^μ の σ 依存性（あるいは曲面 Σ の選択）に影響を受ける．少なくとも曲面の微小変化のもとで，x^μ の σ 依存性あるいは曲面 Σ の選択によらない物理を得るには，

$$\partial_\alpha B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\alpha} + \partial_\nu B_{\alpha\mu} = 0 \tag{15.67}$$

を要請しなければならない．第 2 項は $\partial\Sigma$ で，ある経路 $P - P_0$ にだけ依存する．ここで基準経路 P_0 は一度選ぶと固定され続けるので，P_0 に対して δx^μ はゼロである．したがって，(15.67) が満たされるとき，$\delta\Gamma$ は P に沿う δx^μ あるいは P の微小変位だけに依存する．これは，経路の微小変位に対する要請にすぎない．すぐに見るように $\delta\Gamma$ をより便利な形に書き直せるが，その前に，いくつかの他の性質について議論しよう．まず，条件式 (15.67) の解を考えると，1 つの解は明らかに

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu \tag{15.68}$$

で与えられる．ここで，C_μ はあるベクトルポテンシャルである．このとき，

$$\begin{aligned}
\Gamma &= 2\,\frac{k}{2}\int_\Sigma d^2\xi\ (\partial_\mu C_\nu)\partial_i x^\mu \partial_j x^\nu \epsilon^{ij} \\
&= k\int_\Sigma d^2\xi\ \frac{\partial}{\partial\xi^i}[C_\nu \partial_j x^\nu \epsilon^{ij}] \\
&= k\oint_{\partial\Sigma} d\xi_i\ C_\nu \partial_j x^\nu \epsilon^{ij} \\
&= k\left[\int_P dt\ C_\mu \frac{dx^\mu}{dt} - \int_{P_0} dt\ C_\mu \frac{dx^\mu}{dt}\right]
\end{aligned} \tag{15.69}$$

となる．基準経路はすべての経路に共通なので，その寄与は波動関数に対する共通の位相因子として現れる．したがって，この寄与は経路積分から落とすことができる．よって，各経路 P について $W(P, x, x') = e^{i\tilde{\mathcal{S}}_P(x,x')}$ を得る．ただし，$\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} + k\int dt\ C_\mu \dot{x}^\mu$ である．つまり，単に $\mathcal{S}$ に追加項が現れるだけであるが，これは Σ の議論とは無関係である．ここで議論しようとしているトポロジカル項は次の状況のときにのみ意味をもつ．つまり $B_{\mu\nu}$ が (15.67) をみたすが，(15.68) のようにベクトルの回転 (curl) として表せない，すなわち

$$\partial_\alpha B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\alpha} + \partial_\nu B_{\alpha\mu} = 0, \tag{15.70}$$

$$B_{\mu\nu} \neq \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu \tag{15.71}$$

のときである．定義 (15.65) から，$B_{\mu\nu}$ は μ, ν に対して反対称であることに注意しよう．つまり，これは配位空間上の 2-形式を成分表示した $B = \frac{1}{2} B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ である．条件式 (15.70) は $dB = 0$ と同じであり，(15.71) は 1-形式 C に対して $B \neq dC$ となることと同じである．したがって，ここで興味のある B は閉じてはいるが完全でない $\mathcal{C}$ 上の微分 2-形式，つまり $\mathcal{H}^2(\mathcal{C}, \mathbf{R})$ の要素である．

例として，次のモノポール場を考えよう．

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha} x^\alpha}{|x|^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha} \hat{x}^\alpha}{r^2}, \\ B &= \frac{1}{8\pi} \frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha} \hat{x}^\alpha}{r^2} dx^\mu \wedge dx^\nu. \end{aligned} \tag{15.72}$$

このとき，

$$\begin{aligned} dB &= \frac{1}{3!} (\partial_\alpha B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\alpha} + \partial_\nu B_{\alpha\mu}) dx^\alpha dx^\mu dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha} \epsilon^{\mu'\nu'\alpha'} (\partial'_\alpha B_{\mu'\nu'})\ dx^\alpha dx^\mu dx^\nu \\ &= \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu\alpha} \epsilon^{\mu'\nu'\alpha'} \left[\frac{\epsilon_{\mu'\nu'\alpha'}}{r^3} - 3 \frac{\epsilon_{\mu'\nu'\beta} x^\beta x'_\alpha}{r^5} \right] dx^\alpha dx^\mu dx^\nu \\ &= 0 \quad (r \neq 0) \end{aligned} \tag{15.73}$$

となることがわかる．空間 $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ 上で dB はゼロである．原点のまわりの 2 次元球面で B を積分すると

$$\oint_{S^2} B = 1 \tag{15.74}$$

となるので，$B \neq dC$ である．よって，配位空間が $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ のとき 2-形式 (15.72) は上の議論の一例を与える．つまり，モノポール背景場での荷電粒子の運動を表す経路積分には，$\exp(i\Gamma(\Sigma))$ の項が含まれなければならない．

この解は $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ に対して有効である．この空間は非可縮な 2 次元曲面をもち，実際，解 (15.72) の非自明性を示すのにそのような曲面をもちいた．

つぎに，$\mathbf{R}^3$ から 2 点が除かれた空間を考えよう．この場合，異なるタイプの非可縮な閉曲面が現れる．除かれた 2 点の一方を包む曲面を S_1，もう

一方の点を包む曲面を S_2 としよう．明らかに，これらは互いに変形できない．また，2 点両方を包むような 1 つの曲面を考えることができるが，これは，なめらかな変形によって，$S_1 + S_2$ に分解できる．この場合，すべての非可縮な 2 次元曲面が S_1 と S_2 の多重和で分解できるという意味で，S_1 と S_2 は非可縮な 2 次元曲面の生成元であると言える．より一般には，$\mathcal{H}_2(\mathcal{C})$ を考える必要があり，これは 2 次元閉曲面のうち，それ自体が 3 次元領域の境界でないものの集合である．$\mathcal{H}_2(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ についての 2 次のホモロジー群と呼ばれる．$\mathbf{R}^3 - \{0\}$ の例では，$\mathcal{H}_2(\mathcal{C}) = \mathbf{Z}$ なので，1 つの生成元，すなわち原点のまわりの単位球面がある．$\mathbf{R}^3$ から 2 点を除いた空間の場合の例では，$\mathcal{H}_2 = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ なので，2 つの生成元 S_1, S_2 がある．一般に，各生成元に対してその曲面の面積に比例する $B_{\mu\nu}$ を定義することができ，そのような $B_{\mu\nu}$ は $\oint_S B_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} = 1$ で規格化できる．

ここで経路積分に戻り，Σ について再考しよう．一般に，$P - P_0$ が境界となる曲面は多数あるので，そのような 2 つの曲面として Σ と Σ' を考えよう．ただし，これらは微小変形で互いに一致するものとする．これらは共通の境界をもつので，これらに挟まれた（境界が $\partial V = \Sigma - \Sigma'$ となる）3 次元体積 V を考えることができる．このとき，ストークスの定理から，

$$\begin{aligned}\Gamma_\Sigma - \Gamma_{\Sigma'} &= k \int_{\Sigma - \Sigma'} d^2\xi \ \frac{1}{2} B_{\mu\nu} \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu \epsilon^{ij} = k \int_{\Sigma - \Sigma'} B \\ &= k \int_V dB \\ &= 0 \end{aligned} \tag{15.75}$$

となる．ただし，最後の等式で (15.70) をもちいた．このとき，Γ_Σ は曲面の選択によらないことがわかる．ただし，この議論は $\Sigma - \Sigma'$ が体積 V の境界となる Σ, Σ' の場合にのみ適用できる．$\mathcal{H}_2(\mathcal{C})$ が自明でない場合は，$\Sigma - \Sigma'$ が 3 次元体積の境界とならないことがある．例えば，$\mathbf{R}^3 - \{0\}$ のとき，$\Sigma - \Sigma'$ が原点を囲む 2 次元球面となる Σ, Σ' を選ぶことができる．これは（原点は取り除かれているので）非可縮であり，かつ $\partial V = \Sigma - \Sigma'$ となる体積 V は存在しない．この場合，

$$\Gamma_\Sigma - \Gamma_{\Sigma'} = k \oint_{S^2} B$$

$$= k \tag{15.76}$$

となる．ただし，(15.74) の結果をもちいた．したがって，経路積分では

$$e^{i\Gamma_\Sigma} = e^{i\Gamma_{\Sigma'}}\, e^{ik} \tag{15.77}$$

となる．ここでさらに，$e^{ik} = 1$ あるいは $k = 2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$ という条件を課すと，曲面によらない結果を得ることができる．これはトポロジカル量子化条件である．モノポール場における荷電粒子の場合，これはディラックの量子化条件を再現する．この条件をもちいると，次のように結果をまとめることができる．もし配位空間 $\mathcal{C}$ が非可縮な 2 次元曲面をもつならば（また，もしすべての閉曲線がある曲面の境界であるならば），経路積分を次のように一般化することができる．

$$\Psi(Q,t) = \int [dQ] e^{i\mathcal{S}(Q,t,Q',t') + i\Gamma_\Sigma}\, \Psi(Q',t'). \tag{15.78}$$

ここで，Σ は経路 P と基準経路 $-P_0$ を境界にもつ曲面である．また，Γ_Σ は

$$\Gamma_\Sigma = 2\pi n \int_\Sigma B \tag{15.79}$$

で与えられる．ただし，n は整数である．B は $\mathcal{C}$ 上の 2-形式で

$$dB = 0, \tag{15.80}$$

$$B \neq dC \tag{15.81}$$

をみたす．また，B は

$$\int_S B = 1 \tag{15.82}$$

で規格化される．ここで，S は $\mathcal{H}_2(\mathcal{C})$ 群の生成元である．条件 (15.80), (15.81) をみたす (15.79) のような項はヴェス–ズミノ (WZ) 項と呼ばれる．これらのどの条件式にも $\hbar$ は現れていない．この項もまた古典的な効果をもたない．（一般に，$\mathcal{H}^2(\mathcal{C})$ ではなくむしろ $\mathcal{H}_2(\mathcal{C})$ の非自明性が，いま考えている経路積分のトポロジカルな性質により深く関係している．経路の重みはその経路が境界となる曲面で特定される．ここでは，その重みを微分形式の積分として表し，そこにコホモロジー群を導入した．このような微分形式はいま考えている問題に例外なく現れるので，上の議論で十分である．）

ヴェス–ズミノ項の効果は多くの物理的な状況に現れる．その例として次のものがある．

1. モノポール背景場における荷電粒子の運動
2. 量子色力学 (QCD) の低エネルギーでの振る舞い．特に，バリオンをメソン場のソリトンとして解釈する場合（このようなソリトンはスキルミオンと呼ばれる）
3. 量子異常をもつゲージ理論
4. (1+1) 次元におけるボソン–フェルミオンの等価性

参考文献

1. 経路積分は量子力学における作用の役割に関するディラックの議論から始まった．これが量子化の枠組みの基礎となったのは R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948) による．一般的な教科書として，R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw Hill (1965); L.S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, John Wiley and Sons, Inc. (1981); H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific Pub. Co., 3rd edition (2004) などがある．

2. 非自明な基本群の役割についての議論は以下の文献で与えられた．M.G.G. Laidlaw and C.M. De Witt, Phys. Rev. **D3**, 1375 (1970); J.S. Dowker, J. Phys. **A5**, 936 (1972); R.D. Sorkin, Phys. Rev. **D27**, 1787 (1983); Yong-Shi Wu, Phys. Rev. Lett. **52**, 2103 (1984).

3. 量子化におけるトポロジーの効果は，現在では多くの教科書で議論されている．例えば，A.P. Balachandran, *Classical Topology and Quantum States*, World Scientific Pub. Co. (1991) を参照されたい．

第 16 章

非アーベル型ゲージ理論の配位空間

16.1 配位空間

これまでの章の一般的な解析を具体的な場合に適用してみよう．ここでは特に（ゲージ対称性が破れていない）非アーベル型ゲージ理論の配位空間について考える．当然ながら，量子色力学 (QCD) はこのなかでも最も興味深い理論である．後でみるように，QCD では $\Pi_1(\mathcal{C}) = \mathbf{Z}$ となる．その結果，新しいパラメータ θ が現れ，これが QCD を特徴づけるのに必要となる．

まず，純粋なゲージ理論を考えよう．ここでは $A_0 = 0$ ゲージを選んで解析を行う．そのため，理論はポテンシャル A_i $(i = 1, 2, 3)$ で記述され，これらはリー代数に値をとる．この代数は反エルミート行列 $A_i = -iA_i^a t^a$ にとることができる．ただし，t^a はエルミート行列でゲージ群のリー代数の基底を成す．簡単のため，$SU(2)$ ゲージ理論を考えることとする．ゲージ変換の A_i への作用は

$$A_i \to A_i^g = g\,A_i\,g^{-1} - \partial_i g\,g^{-1} \tag{16.1}$$

で与えられる．ただし，$g(\boldsymbol{x}) : \mathbf{R}^3 \to SU(2)$ である．時間に依存する $g(\boldsymbol{x})$ を考えることはできない．なぜなら，そのような変換はゲージ固定条件 $A_0 = 0$ を変えてしまうからである．したがって，一度 $A_0 = 0$ を選ぶと，上の（時間に依存しない）変換が理論に残されたゲージ自由性を表す．ここで対象となる空間は

$$\mathcal{A} = \{\text{ ゲージポテンシャル } A_i \text{ の空間 }\}, \tag{16.2}$$

$$\mathcal{G}_* = \{\, |\boldsymbol{x}| \to \infty \text{ で } g \to 1 \text{ となる} \\ \text{ゲージ変換 } g(\boldsymbol{x}) : \mathbf{R}^3 \to SU(2) \text{ の空間} \,\} \tag{16.3}$$

である.（これは 10 章での議論と類似している．10 章では汎関数積分を考えるために 4 次元ユークリッド空間でのポテンシャル空間を同様に定義した．ここではポテンシャルとゲージ変換は時間に依存せず空間座標の関数である．10 章と同じ記号をもちいているが，文脈からこれらが意味するところは明らかであろう.）

すでに議論したように，無限遠で要素が一定 $(g_\infty \neq 1)$ となる変換 $g(\boldsymbol{x})$ はネーター対称性として振る舞う．状態は，$\mathcal{G}_*$ 変換を許す限り，そのような変換（これはゲージ群 $SU(2)$ と同型である）の既約ユニタリー表現で分類される．真のゲージ自由性は $\mathcal{G}_*$ だけである．したがって，理論の配位空間は $\mathcal{C} = \mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ となる．この空間の構造を解析するには $\mathcal{A}$ と $\mathcal{G}_*$ の情報が必要である．

（注：無限遠で要素が一定 $(g_\infty \neq 1)$ となるゲージ変換の集合 $\mathcal{G}$ の $\mathcal{A}$ への作用は固定点をもつ．例えば，$A_i = 0$ は一定要素 g による作用のもとで不変である．よって，$\mathcal{A}/\mathcal{G}$ は特異点をもちうる．数学的には，このような特異点を回避するために $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ を使わなければならない．10 章で議論したように，これは物理的にも意味のある量である.）

$\mathcal{A}$ のトポロジー

$\mathcal{A}$ はアフィン空間である．つまり，任意のポテンシャル A_i は $A_i^{(0)} + h_i$ と表される．ただし，$A_i^{(0)}$ は固定されたポテンシャルであり，h_i はリー代数の値をもつ任意のベクトル場である．言い換えると，$\mathcal{A}$ の任意の 2 点は直線で結ぶことができる．$A_i^{(1)}$ と $A_i^{(2)}$ が $\mathcal{A}$ 上の点，すなわちゲージポテンシャルであるとすると，一連の配位

$$A_i(\boldsymbol{x}, \tau) = A_i^{(1)}(1-\tau) + \tau A_i^{(2)} \tag{16.4}$$

$(0 \le \tau \le 1)$ は $A_i^{(1)}$ と $A_i^{(2)}$ の間を内挿する直線を与える．よって，$\mathcal{A}$ は無限次元のユークリッド空間と同じように見える．ただし，位相幾何学的（トポロジカル）には $\mathcal{A}$ はより自明な空間であり，特に，$\Pi_0(\mathcal{A}) = 0$, $\Pi_1(\mathcal{A}) = 0$

となる．

$\mathcal{G}_*$ のトポロジー

$\mathcal{G}_*$ は $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ で $g(\boldsymbol{x}) \to 1$ となる条件下での写像 $g(\boldsymbol{x}) : \mathbf{R}^3 \to SU(2)$ によって構成される．ここでは $SU(2)$ の要素について考えよう．$SU(2)$ 群は単位行列式をもつ (2×2) ユニタリー行列とみなせる．その要素は

$$g = \phi_0 + i\phi_i\sigma_i \tag{16.5}$$

とパラメータ表示することができる．ただし，σ_i はパウリ行列である．条件 $g^\dagger = g^{-1}$ から ϕ_0, ϕ_i は実数であることがわかる．また，$\det g = 1$ より

$$\phi_0^2 + \sum_i \phi_i^2 = 1 \tag{16.6}$$

が必要となる．よって，群 $SU(2)$ はトポロジカルには 3 次元球面である．$\phi_\mu(\boldsymbol{x})$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ は写像 $\mathbf{R}^3 \to S^3$ を与える．さらに，$|\boldsymbol{x}| \to \infty$ の極限で $g \to 1$ となる．このような写像の場合，$\mathbf{R}^3$ 空間自体を 3 次元球面とみなすことができる．具体的には，これは次のように実現することができる．まず，写像

$$y_0 = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \qquad y_i = \frac{2x_i}{x^2 + 1} \tag{16.7}$$

を定義しよう．明らかに $y_0^2 + \sum_i y_i^2 = 1$ となり，y は 3 次元球面を定義する．よって，(16.7) は 3 次元球面としての $\mathbf{R}^3$ を記述し，$|\boldsymbol{x}| \to \infty$ に対応する無限遠は $y_0 = 1$, $y_i = 0$ の極に写像されている．ここで，$SU(2)$ の値をもつ S^3 上の関数（つまり $\sum_\mu y_\mu^2 = 1$ となる $g(y)$）を与えると，(16.7) をもちいてこれを $\mathbf{R}^3$ 上の関数として表すことができる．ただし，$|\boldsymbol{x}| \to \infty$ で $g \to g_\infty$ となり，このとき g_∞ は角度に依存しない．特に，$g_\infty = 1$ と選ぶと $g(1, 0, 0, 0) = 1$ が必要となる．したがって，ここでは写像 $S^3 \to S^3$ を考えていることになる．この写像において，最初の S^3 は (16.7) により $\mathbf{R}^3$ 空間を表し，次の S^3 は $SU(2)$ を表す．このような写像のホモトピー類は $\Pi_3(S^3) = \mathbf{Z}$ で分類される．

つぎに，巻き数 Q を定義してこれらの写像を解析しよう．まず，$\phi^\mu : S^3 \to S^3$ の写像を考える．そこで，空間球面 S^3 を 1 回覆うごとに写像 $\phi^\mu(x)$ に

よって標的球面 S^3 が何回覆われるかを求めよう．$\phi^\mu(x)$ によって生成される像の体積空間は

$$dS_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_i \phi^\nu \partial_j \phi^\alpha \partial_k \phi^\beta \, \epsilon^{ijk} d^3x \tag{16.8}$$

で与えられる．すなわち

$$\begin{aligned} dS_\mu &= \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{ijk} \partial_i \phi^\nu \partial_j \phi^\alpha \partial_k \phi^\beta d^3x \\ &= \phi^\mu d\Omega^{(3)} \end{aligned} \tag{16.9}$$

である．ただし，

$$d\Omega^{(3)} = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{ijk} \phi^\mu \partial_i \phi^\nu \partial_j \phi^\alpha \partial_k \phi^\beta d^3x \tag{16.10}$$

である．S^3 の体積は $2\pi^2$ なので，巻き数

$$\begin{aligned} Q[g] &= \frac{1}{2\pi^2} \{ \, \phi^\mu(x) \text{ の写像軌跡による体積} \, \} \\ &= \frac{1}{12\pi^2} \int d^3x \; \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{ijk} \phi^\mu \partial_i \phi^\nu \partial_j \phi^\alpha \partial_k \phi^\beta \end{aligned} \tag{16.11}$$

を得る．これは次のように直接 $g(x)$ で表すこともできる．

$$\begin{aligned} Q[g] &= -\frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \; \mathrm{Tr} \left(g^{-1} \partial_i g \, g^{-1} \partial_j g \, g^{-1} \partial_k g \right) \epsilon^{ijk} \\ &= -\frac{1}{24\pi^2} \int \mathrm{Tr} (g^{-1} dg)^3 . \end{aligned} \tag{16.12}$$

この公式はリー群のコホモロジーとホモトピーの議論ですでに見たものである．ここでの議論は，そのより具体的な導出を与えていると言えよう．

つぎに，$Q[g]$ の重要な性質を示そう．

(a) Q は ϕ のなめらかな変形のもとで不変である．

これについては 14 章で g をもちいて示したが，ここでは同じ結果を ϕ をもちいて示す．ϕ を $\phi^\mu(x) \to \phi^\mu(x) + \delta\phi^\mu(x)$ と変形する．ただし，$|\boldsymbol{x}| \to \infty$ で $\phi^\mu(x) \to (1,0,0,0)$ となる境界条件は保存されるとする．これより $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ で $\delta\phi^\mu \to 0$ が要請される．さらに，$\phi^\mu \phi_\mu = 1$ が保存されなければならないので，$\delta\phi^\mu \phi_\mu = 0$ である．$\delta\phi^\mu$ の 1 次のオーダーで Q の変化は，

$$Q[\phi + \delta\phi] - Q[\phi] = \frac{1}{12\pi^2} \int d^3x \left[\delta\phi^\mu d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta \right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\phi^\mu d(\delta\phi^\nu)\wedge d\phi^\alpha\wedge d\phi^\beta \\
&+\phi^\mu d\phi^\nu\wedge d(\delta\phi^\alpha)\wedge d\phi^\beta \\
&\left.+\phi^\mu d\phi^\nu\wedge d\phi^\alpha\wedge d(\delta\phi^\beta)\right]\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \\
=\frac{1}{3\pi^2}\int d^3x&\left[\delta\phi^\mu d\phi^\nu\wedge d\phi^\alpha\wedge d\phi^\beta\right]\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \qquad (16.13)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$d(\delta\phi)$ が現れる項について部分積分を行った．$|\boldsymbol{x}|\to\infty$ で $\delta\phi\to 0$ なので，表面項はゼロである．つぎに $\delta\phi\cdot\phi=0$ であるため，任意の反対称テンソル $\omega_{\alpha\beta}$ をもちいて $\delta\phi^\mu=\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\phi_\nu\omega_{\alpha\beta}$ と表される．これを上式に代入すると

$$
\begin{aligned}
Q[\phi+\delta\phi]-Q[\phi]&=\frac{1}{3\pi^2}\int\delta^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\sigma}\phi_\alpha\omega_{\beta\gamma}d\phi^\mu\wedge d\phi^\nu\wedge d\phi^\sigma \\
&=0 \qquad (16.14)
\end{aligned}
$$

を得る．これは，$\delta^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\sigma}$ を展開するとすべての項に $\delta\phi\cdot\phi$ の 1 次の項が現れるためである．したがって，Q は $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ で $\phi^\mu\to(1,0,0,0)$ と固定された $\phi^\mu(x)$ のなめらかな変形のもとで不変である．

(b) $Q[g_1g_2]$ は $Q[g_1g_2]=Q[g_1]+Q[g_2]$ をみたす．

式 (16.12) をもちいて，$Q[g_1g_2]$ を計算しよう．ここで

$$
\begin{aligned}
(g_1g_2)^{-1}d(g_1g_2)&=g_2^{-1}(g_1^{-1}dg_1)g_2+g_2^{-1}dg_2 \\
&=g_2^{-1}(A+B)g_2 \qquad (16.15)
\end{aligned}
$$

となることに注意しよう．ただし，$A=g_1^{-1}dg_1$, $B=dg_2\,g_2^{-1}$ である．この関係式をもちいると，

$$
\begin{aligned}
Q[g_1g_2]&=-\frac{1}{24\pi^2}\int\mathrm{Tr}(A+B)(A+B)(A+B) \\
&=-\frac{1}{24\pi^2}\int\left[\mathrm{Tr}A^3+\mathrm{Tr}B^3+(3A^2B+3B^2A)\right] \\
&=Q[g_1]+Q[g_2]-\frac{1}{8\pi^2}\int\mathrm{Tr}(-dA\,B+AdB) \\
&=Q[g_1]+Q[g_2]+\frac{1}{8\pi^2}\int d(\mathrm{Tr}AB) \qquad (16.16) \\
&=Q[g_1]+Q[g_2] \qquad (16.17)
\end{aligned}
$$

となる．(上式および以下の式では，ウェッジ積つまり反対称化された積は明示しないものとする.）群の値をもつ関数 g_1 と g_2 の積をとると巻き数が加算されることがわかる．(16.16) から (16.17) における表面項の寄与はゼロである．なぜなら A と B の反対称化された積は $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ の極限において十分速く減衰するためである．

つぎに，$Q=1$ となる配位の例を考えよう．これは

$$g_1(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} + i\frac{2x^i}{x^2+1}\sigma_i \tag{16.18}$$

すなわち，$\phi^\mu(x) = y^\mu$ で与えられる．ϕ は3次元球面を成し，これは y についても同様である．$\phi^\mu = y^\mu$ は，y が空間に対応する S^3（あるいは $\mathbf{R}^3$）を覆うと，$SU(2)$ である S^3 が1回覆われることを意味する．したがって，この配位は $Q=1$ を与える．これは積分 (16.12) からも直接確かめることができる．$g_1(x)$ は $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ で $g_1 \to 1$ となるなめらかな配位である．つぎに，至る所で $g(x)=1$ となる配位は明らかに $Q=0$ を与える．$g=1$ が $Q=0$ を，$g=g_1(x)$ が $Q=1$ を与え，また Q はなめらかな変形のもとで不変であることから，$g_1(x)$ がなめらかに変形して至る所で単位元となることはない．さらに，$g(x)=g_1(x)g_1(x)$ を考えると，これは (16.17) から $Q=2$ を与える．また $g=g_1^\dagger(x)$ は $Q=-1$ を与える．これは $Q[g^\dagger g] = Q[g^\dagger] + Q[g]$ と $Q[g^\dagger g] = Q[1] = 0$ から導かれる．これらより，写像 $g(x): S^3 \to S^3$ の同値類は明らかであろう．$\mathcal{G}_*$ は異なる成分の和で書ける．ただし各成分自体はそれぞれ連結しており，巻き数 Q で特徴づけられる．つまり

$$\mathcal{G}_* = \sum_{Q=-\infty}^{+\infty} \oplus\, \mathcal{G}_{*Q} \tag{16.19}$$

と表される．ここで，$\mathcal{G}_{*0}$ はなめらかな変形によって全域で1となるすべての写像で構成され，$\mathcal{G}_{*1}$ はなめらかな変形によって全域で $g_1(x)$ となる全写像で構成される．より一般的に，$\mathcal{G}_{*Q}$ はなめらかな変形によって $g_1(x)$ の Q 重項となるすべての写像で構成される．同様に，$g_1^\dagger(x)$ をもちいて $\mathcal{G}_{*-Q}$ を定義できる．また $Q \neq Q'$ のとき $\mathcal{G}_{*Q}$ と $\mathcal{G}_{*Q'}$ は互いに分離している．というのも，もしこれらが連結しているならば，$(g_1)^Q$ と $(g_1)^{Q'}$ は互いに変形可能であるが，$Q \neq Q'$ なのでこれは不可能であるからである．Q は (16.17) に

あるように2つの写像の積によって加算されるので，この構造は整数 $\mathbf{Z}$ の加法群と同型である．

以上から $\mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ の構造を解析することができる．そこで，次で与えられる $\mathcal{A}$ の直線

$$A_i(x,\tau) = A_i(x)(1-\tau) + A_i^{g_1}\tau \tag{16.20}$$

$(0 \leq \tau \leq 1)$ を考えよう．あるいは，より一般的に

$$\begin{cases} A_i(x,0) = A_i(x) \\ A_i(x,1) = A_i^{g_1}(x) \end{cases} \tag{16.21}$$

となる $A_i(x,\tau)$ $(0 \leq \tau \leq 1)$ を考えよう．ただし，$A_i^{g_1}$ は (16.1) にあるように $g_1(x)$ による A_i のゲージ変換を表す．これは $\mathcal{A}$ 上の開いた経路である．しかし，$A_i^{g_1}$ は A_i のゲージ変換であるので A_i と $A_i^{g_1}$ は $\mathcal{C} = \mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ 上で同じ点を表す．したがって，$A_i(x,\tau)$ は $\mathcal{C}$ 上で閉じたループを記述する．問題はこのループが可縮であるかどうかにある．もしループが可縮であれば，その軌跡をゲージの流れの方向に沿った曲線に合わせることができ，$g=1$ と $g=g_1(x)$ を連結できる．これは $g_1(x)$ がなめらかな変形によって単位元になることを意味している．しかし，これはすでに見たように $\mathcal{G}_*$ の構造の議論から不可能である．つまり，これは (16.21) の $A_i(x,\tau)$ が可約でないループであることを意味する．したがって，$\Pi_1(\mathcal{C}) \neq 0$ である．さらに，$g_2 = g_1 g_1$ や g_3, g_4，また $g_1^\dagger$ でこの議論を繰り返すことができる．よって，構成則 $Q[gg'] = Q[g] + Q[g']$ をもちいると，直ちに

$$\Pi_1(\mathcal{C}) = \Pi_1(\mathcal{A}/\mathcal{G}_*) = \mathbf{Z} \tag{16.22}$$

であることがわかる．

ホモトピー群の完全系列をもちいてこれを理解することもできる．(16.19) から $\mathcal{G}_*$ は Q で指定される連結成分をもつので，$\Pi_0[\mathcal{G}_*] = \mathbf{Z}$ となる．よって，$\Pi_1[\mathcal{A}] = \Pi_0[\mathcal{A}] = 0$ をもちいると，

$$\to \Pi_1[\mathcal{A}] \to \Pi_1[\mathcal{A}/\mathcal{G}_*] \to \Pi_0[\mathcal{G}_*] \to \Pi_0[\mathcal{A}] \to \tag{16.23}$$

は $\Pi_1[\mathcal{A}/\mathcal{G}_*] = \mathbf{Z}$ を与える[1]．

---

[1] ［訳註］14.6 節の議論を参照されたい．

16.2　QCD の経路積分

経路積分についての一般的な議論と上の結果 (16.22) から，QCD はゲージ結合定数に加えてもう 1 つのパラメータ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ を持つことがわかる．経路積分は

$$\Psi[A,t] = \int d\mu[\mathcal{A}/\mathcal{G}_*]\, e^{i\mathcal{S}(A,A')} e^{i\theta\nu(A,A')}\, \Psi[A',t'] \tag{16.24}$$

で与えられる[2]．$\nu[A]$ はまだ決まっていない量である．一般論でみたように，$\nu[A]$ は経路の微小変化のもとで不変であり，$A_i(x)$ と $A_i^g(x)$ の「境界値」にだけ（実際には g にだけ）影響を受ける．さらに，この量はローレンツ不変でなければならない．経路積分の経路は時間でパラメータ表示されるので，このとき τ は時間変数 t となる．したがって，

$$\nu[A] = \int d^4x\ \partial_\mu K^\mu(A) \tag{16.25}$$

と書けることが期待される．時間積分を実行すると

$$\nu(A,A') = \int_{t=\infty} d^3x\ K^0(A) - \int_{t=-\infty} d^3x\ K^0(A') \tag{16.26}$$

を得る．これは明らかにその間の経路に依存しない．$Q[g]$ は閉曲線の巻き数を与えるので，

$$\int d^3x\ \left[K^0(A^g) - K^0(A)\right] = Q[g] = -\frac{1}{24\pi^2}\int \mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^3 \tag{16.27}$$

あるいは

$$K^0(A^g) - K^0(A) = -\frac{1}{24\pi^2}\mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^3 + (\,\boldsymbol{x}\text{の全微分項}\,) \tag{16.28}$$

となるべきである．

いま A^g は $gAg^{-1} - dg\,g^{-1}$ を与え，さらに dA^g は $(dg\,g^{-1})^2$ を含むので，$(g^{-1}dg)^3$ を得るには $K^0(A)$ が $\epsilon^{ijk}A_i\partial_j A_k \sim AdA$ と $\epsilon^{ijk}A_iA_jA_k \sim A^3$ で構成されている必要がある．よって，

$$K^0(A) = \mathrm{Tr}\left[aAF + bA^3\right] \tag{16.29}$$

---

[2]［訳註］この式は 15.5 節，15.6 節の議論に基づく．

とおくと,

$$K^0(A^g) - K^0(A) = \mathrm{Tr}\left[-avF - 3bvA^2 + 3bv^2A - bv^3\right] \tag{16.30}$$

が得られる．ただし，$v = g^{-1}dg$ である．v^3 を含む最後の項が $Q[g]$ に必要な形であるので，b を $(1/24\pi^2)$ と同定できる．A を含む項は相殺するか，全微分項となる必要がある．よって，$a = -3b$ と決めることができる．したがって，

$$\begin{aligned} K^0(A) &= -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}[AF - \frac{1}{3}A^3] \\ &= -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(A_i\partial_j A_k + \frac{2}{3}A_iA_jA_k)\epsilon^{ijk} \end{aligned} \tag{16.31}$$

を得る．これを共変な形にすると，明らかに

$$K^\mu(A) = -\frac{1}{8\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right] \tag{16.32}$$

となる．$K^0(A)$ は（3 次元）チャーン–サイモンズ項と呼ばれる．(16.32) から

$$\partial_\mu K^\mu(A) = -\frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right] \tag{16.33}$$

がわかる．したがって，QCD の経路積分は

$$\Psi[A,t] = \int d\mu[\mathcal{A}/\mathcal{G}_*]\, e^{i\mathcal{S}(A,t,A',t') + i\theta\int_{t'}^{t} d^4x\,\partial_\mu K^\mu}\,\Psi[A',t'] \tag{16.34}$$

となる．グリーン関数を求めるには，$t \to \infty$, $t' \to -\infty$ を考える必要がある．このときグリーン関数の生成汎関数となる経路積分は

$$Z[J] = \int d\mu[\mathcal{A}/\mathcal{G}_*]\, e^{i\mathcal{S}(A) + i\theta\nu[A]}\, e^{\int d^4x\, iA^a_\mu J^{a\mu}} \tag{16.35}$$

で与えられる．ここで，任意の相関関数を計算しやすくするためにソース項 $e^{i\int A\cdot J}$ を入れた．$\nu[A]$ は

$$\nu[A] = -\frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\; \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right] \tag{16.36}$$

で与えられる．全時間（と空間）にわたって積分された $\nu[A]$ はインスタントン数として知られている．密度

$$c_2 = \frac{1}{32\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right] = \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(F\wedge F) \tag{16.37}$$

はゲージ場 A の第 2 チャーン類であり，$-\nu[A]$ は第 2 チャーン指標を与える．

$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\,[F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}]$ の重要な特徴は，ϵ 記号のために，時間添え字 1 つと空間の添え字 3 つだけを持つことである．その結果，これはパリティ P と時間反転 T について奇である．したがって，経路積分にこの項がある場合，$\theta \neq 0$ であれば，強い相互作用によって T の破れが起きる．(ここまで，$SU(2)$ について議論してきた．QCD の場合はゲージ群を $SU(3)$ に拡張しなければならないが，これまでの解析はすべてのコンパクト・ゲージ群に適用できる．というのも，それらは常に $SU(2)$ 部分群を含み，すべてのコンパクト・リー群は $SO(4)$ を除き $\Pi_3(G) = \mathbf{Z}$ となるからである．なお，$SO(4)$ の場合は $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ となる．) T の破れの 1 つの帰結として，中性子が電気双極子モーメントをもつことが導ける．中性子電気双極子モーメントの観測結果から，θ についての実験的な上限は

$$|\theta| \leq 10^{-9} \tag{16.38}$$

となる．θ がこのように異常に小さな値をとることは長年のなぞであり，強い CP 問題と呼ばれる．背後にある何かの対称性のために $\theta = 0$ となることが提唱されている．θ のこの小さな値を理解する試みから，アクシオン (axion) の概念や関連したアイデアが生まれた．

$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ があることによるもう 1 つの重要な結果は，$\nu[A]$ のユークリッド空間への接続において $i = \sqrt{-1}$ 因子が一切現れないことである．つまり，

$$d^4x\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \sim dtd^3x\ \epsilon^{ijk}F_{0i}F_{jk} = dx^4d^3x\ \epsilon^{ijk}F_{4i}F_{jk} \tag{16.39}$$

と表せる．ただし，$x^4 = it = ix^0$ である．よって，$Z[J]$ の公式 (16.35) はユークリッド汎関数積分をもちいて

$$\begin{aligned} Z[J] &= Z_E[J]\Big]_{x^4=ix^0,A_4=-iA_0}, \\ Z_E[J] &= \int d\mu[\mathcal{A}/\mathcal{G}_*]\, e^{-\mathcal{S}_E(A)+i\theta\nu[A]}\, e^{i\int A\cdot J} \end{aligned} \tag{16.40}$$

と書ける．

16.3 インスタントン

$\Pi_1(\mathcal{C}) = \mathbf{Z}$ であることはすでに示した．$\mathcal{C} = \mathcal{A}/\mathcal{G}_*$ には可縮でない経路が存在する．そのような経路の例として，

$$A_i(\boldsymbol{x}, x_4) = A_i(\boldsymbol{x})\frac{1}{e^{x_4}+1} + \frac{e^{x_4}}{e^{x_4}+1}A_i^{g_1}(\boldsymbol{x}) \tag{16.41}$$

がある．これは $x_4 \to -\infty$ で $A_i(\boldsymbol{x}, x_4) \to A_i(\boldsymbol{x})$, $x_4 \to +\infty$ で $A_i(\boldsymbol{x}, x_4) \to A_i^{g_1}(\boldsymbol{x})$ の性質をもつ．その構成から $\nu[A_i(\boldsymbol{x}, x_4)] = 1$ となる．このような経路の経路積分への寄与は $\exp(-\mathcal{S}[A(x)] + i\theta)$ で与えられる．もちろん，(16.41) に変形される無数の経路がある．そのような経路の和をとる際，ユークリッド作用が最小になる経路からの寄与が支配的になる．したがって，次のような性質をもつある特別な経路が期待できる．

1. $\frac{\delta \mathcal{S}_E}{\delta A_\mu} = 0$，つまり純粋なヤン–ミルズ理論では $D_\mu F^{\mu\nu} = 0$.
2. $A_0 \equiv A_4 = 0$（ゲージ選択）.
3. $x_4 \to -\infty$ で $A_i(\vec{x}, x_4) \to 0$，また $x_4 \to \infty$ で $A_i(\vec{x}, x_4) \to -\partial_i g_1\, g_1^{-1}$.
4. $\mathcal{S}_E[A_i(x)] < \infty$.（これ以外のときは，$\mathcal{S} \to \infty$ で $e^{-\mathcal{S}} \to 0$ となるので，経路積分に無関係である.）

3 つ目の条件では，簡単のため，始めの配位を $A_i(\boldsymbol{x}) = 0$ とした．ゲージ変換を別にすると，これらの条件は

$$\begin{aligned} D_\mu F^{\mu\nu} &= 0, \\ \nu[A] &= 1, \\ \mathcal{S}_E[A] &< \infty \end{aligned} \tag{16.42}$$

と同じである．(16.42) をみたす配位 $A_\mu(x)$ はインスタントンと呼ばれる．$\nu[A] = -1$ の配位は反インスタントンを与える．$\nu[A]$ が整数 ($\neq -1, 0, 1$) となる $A_\mu(x)$ は巻き数が複数の多重インスタントンあるいは反インスタントンをそれぞれ与える．

1-インスタントンの配位は

$$A_\mu(x) = \frac{x^2}{x^2+\lambda^2}\omega^{-1}\partial_\mu\omega, \qquad \omega = \frac{x_4 + i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{e_\mu x^\mu}{\sqrt{x^2}} \tag{16.43}$$

と表される．ただし，$x^2 = x_\mu x^\mu$, $e_\mu = (1, i\tau_i)$ である．λ はインスタントンの「サイズ」を与えるスケール因子である．$\nu[A]$ の導出は $A_0 = A_4 = 0$ のゲージで議論されたので，配位 (16.43) をこのゲージで表せることに注意しよう．すると次のような配位を得る．

$$A_i = U\left(\frac{x^2}{x^2+\lambda^2}\omega^{-1}\partial_i\omega\right)U^{-1} - \partial_i U\,U^{-1}, \tag{16.44}$$

$$U = \exp\left(i\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{x}\rho\right], \tag{16.45}$$

$$\rho = -\frac{|\boldsymbol{x}|}{\sqrt{|\boldsymbol{x}|^2+\lambda^2}}\left[\arctan\left(\frac{x_4}{\sqrt{|\boldsymbol{x}|^2+\lambda^2}}\right) + \frac{\pi}{2}\right], \tag{16.46}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x_4} = -\frac{|\boldsymbol{x}|}{x^2+\lambda^2}. \tag{16.47}$$

(ここで，ゲージポテンシャルの公式には一般に特異点があることに注意しよう．特異点のない記述を得るには，異なる座標パッチ上の異なる A の表現を定義しなければならない．その際，ゲージ変換はパッチが重なる部分での推移関数で与えられる．$\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta})$ やその積分といったゲージ不変量は非特異であり，インスタントンは問題なく定義される．しかし，インスタントン数をゲージ不変でない $K^0(A)$ で表すには，パッチをもちいた記述が必要となる.)

インスタントン配位は自己双対 ($F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}$) あるいは反自己双対 ($F_{\mu\nu} = -\tilde{F}_{\mu\nu}$) の条件に従う．これは，いわゆるボゴモルニー (Bogomol'nyi) 不等式を使うと簡単にわかる．$F^a_{\mu\nu}$ の双対は $\tilde{F}^a_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^a_{\alpha\beta}$ で与えられる．まず不等式

$$\int d^4x\,(F^a_{\mu\nu} - \tilde{F}^a_{\mu\nu})^2 \geq 0 \tag{16.48}$$

から始めよう．この展開式とインスタントン数 $\nu[A]$ の定義 (16.36) をもちいると，ユークリッド化されたヤン–ミルズ作用は

$$\mathcal{S}_E = \frac{1}{4g^2}\int d^4x\ F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$$

$$\geq \frac{8\pi^2}{g^2} \left|\nu[A]\right| \tag{16.49}$$

となる．これはボゴモルニー不等式である．(インスタントン数が負の場合，不等式 $(F^a_{\mu\nu} + \tilde{F}^a_{\mu\nu})^2 \geq 0$ をもちいて上の不等式を得ることできる．) $\nu = 1$ のときこの不等式は等号となるので，この解は自己双対でなければならない．もし解が自己双対あるいは反自己双対であるとすると，解くべき方程式は微分についての 1 次の式となり，簡単になることに注意しよう．(16.43), (16.47) で与えられる解は自己双対性をもつ．実際，ボゴモルニー不等式から $\nu \neq 0$ となる解はすべて自己双対か反自己双対でなければならないことがわかる．もちろん，$\nu \neq 0$ であるが自己双対でも反自己双対でもない配位は多数存在する．しかし，それらは運動方程式の解とならない．また，すべての（反）自己双対配位が作用を極小化するとは限らない．これらの配位が作用の単なる極値である場合も数多くある．

(16.43) の 1-インスタントンの配位は

$$A^a_\mu = 2\frac{\eta^a_{\mu\nu}x^\nu}{(x^2 + \lambda^2)} \tag{16.50}$$

と表すこともできる．ここで，3 つの $\eta^a_{\mu\nu}$ は

$$\eta^a_{\mu\nu} = -\delta^a_\mu \delta_{\nu 4} + \delta^a_\nu \delta_{\mu 4} + \epsilon^{abc}\delta_{\mu b}\delta_{\nu c} \tag{16.51}$$

で与えられる．$\eta^a_{\mu\nu}$ はトフーフト ('t Hooft) テンソルと呼ばれる．

インスタントン解は汎関数積分の半古典的な評価を行うのにもちいることができる．このためには，$A = A_{inst}(x) + \xi(x)$ としてインスタントン解のまわりで作用を展開する必要がある．ただし，$\xi(x)$ は場の微小な揺らぎである．作用の展開式で $\xi(x)$ の 2 次の項までをとると，ガウス積分をすることで $Z[J]$ を求めることができる．これは，1 つのインスタントだけで行ってはならない．つまり，多重インスタントン解を含むすべての古典解について和を考える必要がある．実際の計算は，十分に離れたインスタントンと反インスタントンの希薄ガスの場合に限られている．この計算によって理論のいくつかの特徴が明らかにされているが，それらはまだ弱結合の領域に限られている．

16.4 インスタントン背景場におけるフェルミ粒子と指数定理

ユークリッド計量をもつ 4 次元空間 $\mathcal{M}$ を考えよう．ここではディラック演算子の固有モードについて解析する．多様体上のスピノールは左右のカイラリティをもつ成分に分解できる．

$$\psi = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\,\psi + \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\,\psi$$
$$\equiv \phi_L + \phi_R. \tag{16.52}$$

つぎに $\gamma \cdot D = D - D^\dagger$ となるように演算子 D を定義しよう[3]．ただし

$$D = (\gamma \cdot D)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right),$$
$$D^\dagger = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)(\gamma \cdot D)^\dagger = (-\gamma \cdot D)\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) \tag{16.53}$$

である．多様体上でカイラリティが左の**規格化可能な**スピノールのモードを E_L で示そう．また，カイラリティが右の規格化可能なモードを E_R とする．γ_μ はカイラリティを交換するので，写像

$$D : E_L \longrightarrow E_R,$$
$$D^\dagger : E_R \longrightarrow E_L \tag{16.54}$$

を得る．例えば，ϕ が E_L に属しているとき，

$$\gamma_5(D\phi) = \gamma_5(\gamma \cdot D)\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\phi = -(\gamma \cdot D)\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\phi$$
$$= -D\phi \tag{16.55}$$

となる．これは $D\phi$ が E_R に属し，$\gamma_5 = -1$ となることを示している．これはまた，もし $D\phi \neq 0$ ならば，E_R から E_L への写像が 1 対 1 であることを示している．同様に，$D^\dagger$ は E_R から E_L への 1 対 1 写像を与える．よって，ゼロでないモードは対（つい）を成すことがわかる．ゼロモードあるいは 2 つの演算子の核（カーネル）は対になる必要はない．これを次の指数（インデックス）で定義する．

---

[3] ［訳註］左辺の D は共変微分 D_μ を意味し，右辺の D とは異なる．

$$\text{index}(\gamma \cdot D) = dim(ker\, D) - dim(ker\, D^\dagger). \qquad (16.56)$$

別の方法でこれを表すこともできる．まず，D や $D^\dagger$ の固有モードを定義することはできない．これはこれらが異なる空間を結合するためである．ところが，$D^\dagger D : E_L \to E_L$ および $DD^\dagger : E_R \to E_R$ が成り立つ．もし ϕ が $D^\dagger D$ の固有関数で，固有値が λ （つまり $D^\dagger D\phi = \lambda\phi$）であるなら，$D\, D^\dagger D\phi = \lambda D\phi$ となり，$D\phi$ も $DD^\dagger$ の固有関数で同じ固有値をもつことがわかる．すべてのゼロでないモードは完全に対を成す．さらに $D^\dagger D$ と $DD^\dagger$ は楕円型演算子である．つまり，微分演算子の数が最大となる項は楕円型である．したがって，次のように定義することもできる．

$$\begin{aligned}\text{index}(\gamma \cdot D) &= dim(ker\, D^\dagger D) - dim(ker\, DD^\dagger) \\ &= \begin{pmatrix} D^\dagger D\text{の} \\ \text{ゼロモードの数} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} DD^\dagger\text{の} \\ \text{ゼロモードの数} \end{pmatrix}. \qquad (16.57)\end{aligned}$$

$\mathcal{M}$ はコンパクトで向き付け可能なリーマン多様体で，$\mathcal{M} = \emptyset$ であると仮定する．ここでは平坦なユークリッド空間を考えているので，これは $|x| \to \infty$ で $F_{\mu\nu}$ がゼロとなることを意味する．この場合，演算子 $D^\dagger D$ と $DD^\dagger$ はフレドホルム作用素となる[4]．これは連続な演算子で，重複度が有限な固有値をもつ．したがって，指数は有限となる．

指数はまた

$$\begin{aligned}\text{index}(\gamma \cdot D) &= \text{Tr}\left[e^{-D^\dagger D/M^2}\right]_{E_L} - \text{Tr}\left[e^{-DD^\dagger/M^2}\right]_{E_R} \\ &= \text{Tr}\left[\gamma_5 \exp\left((\gamma \cdot D)^2/M^2\right)\right]_{E=E_L+E_R} \\ &\equiv \text{Tr}(\gamma_5) \qquad (16.58)\end{aligned}$$

と表される．トレースは固有モードの無限次元空間とディラック行列についてとられる．和をとると，ゼロでない固有値と固有モードは対消滅する．固有値がゼロになる場合，M^2 がどのような値をとっても問題ないので $M^2 \to \infty$ として計算できる．このとき，

---

4 ［訳註］章末の参考文献 9 にあるように指数定理は数学者によって示された．数学の文献では一般に演算子 (operator) は作用素と訳される．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{index}(\gamma \cdot D) &= \lim_{M^2 \to \infty} \mathrm{Tr}\left[\gamma_5 e^{(\gamma \cdot D)^2/M^2}\right] \\
&= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\langle y|p\rangle\langle p|\gamma_5 e^{-(\gamma\cdot(p-iA))^2/M^2}|x\rangle\right]_{M^2\to\infty, y\to x} \\
&= \int d^4 x \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\left[\gamma_5 \exp\left(-(p-iA)^2/M^2\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu/M^2\right)\right] \\
&= \int d^4 x\ \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2!M^4}\gamma_5 \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu \frac{1}{2} F_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\right] \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-p^2/M^2} \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \int d^4 x\ \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right) \\
&= -\nu[A] \qquad (16.59)
\end{aligned}
$$

となる.（ここで，$\epsilon_{4123} = \epsilon_{0123} = 1$，$\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta) = 4\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ をもちいた.）したがって，

$$
dim(ker\, D) - dim(ker\, D^\dagger) = -\nu[A] \qquad (16.60)
$$

が示された．これは，4 次元スピン複体 (spin complex) という特別な場合におけるアティヤ–シンガー (Atiyah–Singer) の指数定理である．なお，一般的な指数定理では，偶数次元の楕円型複体の指数が積分公式として与えられている．

指数はトポロジカルな不変量である．つまり，これはポテンシャル A_μ の微小変化のもとで不変である．指数を表面積分

$$
\begin{aligned}
\nu[A] &= \oint d\Sigma_\mu K^\mu, \\
K^\mu &= -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}\left(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}
\end{aligned} \qquad (16.61)
$$

で表すと，簡単に

$$
\begin{aligned}
\nu[A+\xi] &= \nu[A] - \frac{1}{4\pi^2}\oint d\Sigma_\mu \mathrm{Tr}(\xi_\nu F_{\alpha\beta})\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \\
&= \nu[A] \qquad (16.62)
\end{aligned}
$$

を確認できる．ただし，$|x| \to \infty$ で $F_{\alpha\beta} \to 0$ となることをもちいた．この議

論から $\oint d\Sigma_\mu K^\mu$ はゼロではないことがわかる．というのも，これはゲージ不変ではなく，A_μ はゼロである必要はないからである．ただ A_μ は $|x| \to \infty$ で純粋なゲージポテンシャルにとれる．したがって，状況は以下のとおりである．ポテンシャル A_μ が与えられたとき，$D^\dagger D$ と $DD^\dagger$ がそれぞれ n_+, n_- 個のゼロモードを持つとする．上で示したことは $n_+ - n_- = -\nu[A]$ であるので，$|\nu[A]|$ 個のゼロモードを除いて，残りはすべて対(つい)になる．対になったゼロモードは，もしあるならば，一般に A_μ の微小変化のもとで保存しない．したがって，ポテンシャルを微小変化させると，これらは消滅し，非ゼロモードとなる．一方，対にならないゼロモードはポテンシャル A_μ の微小な変形によって保存する．

つぎに，フェルミ粒子の汎関数積分を考えよう．

$$Z = \sum_\nu \int d\mu(A)[d\psi d\bar{\psi}]\, e^{i\nu\theta} \exp\left(-\mathcal{S}[A] - \int \bar{\psi}\gamma \cdot D\psi\right)$$
$$= \sum_\nu Z_\nu. \tag{16.63}$$

$\nu = -1$ となるセクターでは

$$Z_1 = \int d\mu(A)[d\psi d\bar{\psi}]\, e^{-i\theta} \exp\left(-\mathcal{S}[A] - \int \bar{\psi}\gamma \cdot D\psi\right) \tag{16.64}$$

と書ける．ディラック・ラグランジアンは $\bar{\psi}\gamma \cdot D\psi = \bar{\phi}_L D\phi_L - \bar{\phi}_R D^\dagger \phi_R$ と分離できる．ただし，

$$\phi_L \in E_L, \qquad \bar{\phi}_L \in E_R^*,$$
$$\phi_R \in E_R, \qquad \bar{\phi}_R \in E_L^* \tag{16.65}$$

である．これに基づいて，次のモード展開式を導入しよう．

$$\phi_L = a\phi_0 + \sum_n b_n \phi_n,$$
$$\bar{\phi}_L = \sum_n \bar{b}_n \chi_n^*,$$
$$\phi_R = \sum_n c_n \chi_n, \tag{16.66}$$
$$\bar{\phi}_R = \bar{a}\phi_0^* + \sum_n \bar{c}_n \phi_n^*.$$

ここで，ϕ_0 はゼロモードであり，係数 $a, \bar{a}, b_n, \bar{b}_n, c_n \bar{c}_n$ はグラスマン数である．ϕ_0 がゼロモードなので，作用は $a, \bar{a}$ によらない．実際，ディラック作用は

$$\mathcal{S}_D = \sum_{m,n} \left[\bar{b}_n b_m \int \chi_n^* D \phi_m - \bar{c}_n c_m \int \phi_n^* D^\dagger \chi_m \right] \tag{16.67}$$

となる．フェルミ粒子の積分測度は $da d\bar{a}$ の因子を含む．したがって，

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int d\mu(A) [db d\bar{b} dc d\bar{c}] da d\bar{a} \; e^{-i\theta} \exp\left(-\mathcal{S}_D(b, c, \bar{b}, \bar{c}) - \mathcal{S}(A) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{16.68}$$

となる．なぜなら，グラスマン変数 a と $\bar{a}$ について $\int da d\bar{a} = 0$ が成り立つからである．無質量のフェルミ粒子がある場合，1-インスタントン（より一般には多重インスタントン）の汎関数積分への寄与はゼロとなる．ゼロでない振幅は，a と $\bar{a}$ の因子を引き出す $\bar{\phi}_R \phi_L$ を含まなければならない．よって，このとき

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_R \phi_L &= \bar{a} a \int \phi_0^* \phi_0 + \cdots, \\ \langle \bar{\phi}_R \phi_L \rangle &= \int da d\bar{a} \; \bar{a} a \left(\int d^4 x \phi_0^* \phi_0 \right) \\ &\quad \times \int d\mu(A) [db d\bar{b} dc d\bar{c}] \; e^{-i\theta} \exp\left[-\mathcal{S}_D(b, c, \bar{b}, \bar{c}) - \mathcal{S}(A) \right] \end{aligned} \tag{16.69}$$

となることがわかる．

より一般には $(-\nu)$ 個のゼロモードがあり，ゼロでない振幅を得るのに十分なグラスマン変数をもつためには $(\bar{\phi}_R \phi_L)^{-\nu}$ のような因子が必要となる．フェルミオンの種類が複数ある場合は，それぞれの種に対応したゼロモードがあるので，ゼロでない積分値を得るにはフェルミオン各種について $\bar{\phi}_R \phi_L$ のような因子を導入しなければならない．グラスマン数の反対称性から，ゼロでない振幅は $\det(\bar{\phi}_R \phi_L)$ を伴うことがわかる．よって，フェルミオンの積分結果は次の有効作用で表される．

$$\mathcal{S}_{eff} = -i\nu \int \log \det \bar{\phi}_R \phi_L. \tag{16.70}$$

これはトフーフトの有効相互作用である．軸性アノマリーを求めた際の有効

作用はこれに密接に関係している．これはQCDの $U(1)_A$ 問題を理解する1つの方法を与える．つまり，η' 粒子の余剰質量は本質的にQCDのインスタントンによって誘導されるこの相互作用をもちいて理解できる．また，電弱相互作用を記述する $SU(2)\times U(1)$ ゲージ理論において，インスタントンによって生成される同様な項は，標準模型におけるバリオン数の破れの効果を導く．

軸性 $U(1)$ 変換のもとで $\phi_L \to e^{-i\alpha}\phi_L, \phi_R \to e^{i\alpha}\phi_R$ となる．フェルミオンの積分測度において，b と c の変換によるベキ指数は相殺する．よって，測度は

$$[dad\bar{a}]\,[dbd\bar{b}dcd\bar{c}] \to e^{2i\alpha}\,[dad\bar{a}]\,[dbd\bar{b}dcd\bar{c}] \tag{16.71}$$

と変換する．一般に，インスタントン数 ν の場合は，

$$\begin{aligned}[d\psi d\bar{\psi}] &\to e^{-2i\alpha\nu}\,[d\psi d\bar{\psi}]\\ &= \exp\left(2i\alpha(\mathrm{Tr}\gamma_5)\right)\,[d\psi d\bar{\psi}]\end{aligned} \tag{16.72}$$

となる．ただし，γ_5 についての汎関数トレースの定義 (16.58) をもちいた．ベキ指数の因子は軸性 $U(1)$ 変換 $\psi \to \exp(-i\gamma_5\alpha)\psi$ のヤコビアンと解釈できる．(フェルミオン測度の変換についてのヤコビアンはボソン場のヤコビアンの逆関数であり，これよりベキ指数の符号を理解できる．) したがって，作用は軸性 $U(1)$ 変換のもとで不変であるものの，積分測度はそうならず，これが軸性アノマリーを導く．軸性アノマリーの積分表現が指数定理 (16.60) である．これより，汎関数測度が不変でないためにアノマリーが生じるという新しい解釈を得ることができる．その詳細については次章で議論しよう．

16.5 標準模型におけるバリオン数の破れ

量子異常（アノマリー）の議論でバリオン数 (B) とレプトン数 (L) は標準模型においてよい対称性でないことをみた[5]．$B-L$ の組み合わせのみがアノマリーを持たないよい対称性であった．したがって，標準模型はバリオン数を破る相互作用を含むはずである．指数定理をもちいてこれがどのように

---

[5] ［訳註］13.4 節を参照されたい．

起こるか詳しく見ることができる．

バリオン数とレプトン数の破れは 13 章で次のように与えられた．

$$\partial_\mu J^{B\mu} = \partial_\mu J^{L\mu} = c_2[b] - 2\,c_2[c]. \tag{16.73}$$

$-c_2[b]$ は弱い相互作用の $SU(2)$ ゲージ場のインスタントン密度である．したがって，この $SU(2)$ インスタントン数がゼロでないゲージ場の配位，例として $\nu = -1$ の場合を考えよう．このとき，$SU(2)$ ゲージ場と結合するすべての無質量フェルミオン場にゼロモードが現れる．クォークとレプトンが 1 世代の標準模型では，関連するフェルミオンは u, d クォークの左巻き 2 重項（ダブレット）と e, ν_e の 2 重項である．クォークは 3 つのカラーをもつ．これは，単に $SU(2) \times U(1)$ ゲージ場との結合における縮退度である．したがって，クォークには 3 つのゼロモード（各カラーにつき 1 つ），レプトンには 1 つのゼロモードがあると期待される．それぞれの場は

$$\begin{aligned} \phi_L &= a\phi_0 + \sum_n b_n \phi_n, \\ \bar{\phi}_L &= \sum_n \bar{b}_n \chi_n^* \end{aligned} \tag{16.74}$$

と展開される．グラスマン係数は互いに反交換関係にあるので，ゼロでない値を得るには場の並びを反対称化する必要がある．これを考慮すると，1-インスタントン・セクターにおいて消滅することのない振幅の形は

$$\begin{aligned} &\epsilon_{abc}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta}\epsilon^{AB}\epsilon^{CD}\langle Q_A^{a\alpha}(x) Q_B^{b\beta}(x) Q_C^{c\gamma}(x) l_D^{\delta}(x)\rangle \\ &\quad = \int d\mu[A,\psi,\bar{\psi}]\, e^{-\mathcal{S}_E}\, \epsilon_{abc}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta}\epsilon^{AB}\epsilon^{CD} Q_A^{a\alpha}(x) Q_B^{b\beta}(x) Q_C^{c\gamma}(x) l_D^{\delta}(x) \end{aligned} \tag{16.75}$$

となる．ここで，a, b, c はカラーの添え字，$\alpha, \ldots, \delta$ は $SU(2)$ の添え字，$A, \ldots, D$ は左巻き場の 2 成分のローレンツ添え字を表す．左辺はカラー $SU(3)$，弱い $SU(2)$，そしてハイパーチャージ $U(1)_Y$ 変換のもとで不変であり，またローレンツ変換についても不変である．この組み合わせから，グラスマン積分がゼロとならないために必要なゼロモードの係数の値を読み取ることができる．積分値は実際には小さな値となる．これはインスタントンの作用は少なくとも $8\pi^2/g^2$（g は $SU(2)$ の結合定数）をもつためである．し

たがって，1-インスタントンの配位のまわりで展開すると，積分はそのベキ指数から減衰因子 $\exp(-8\pi^2/g^2)$ をもつ．g は小さいので，この因子は非常に小さくなる．式 (16.75) を拡張して，同じ点 x にある多数のヒッグス場を含む振幅を考えると，これは点 x で局所的にバリオン数を破るようなヒッグス粒子生成を伴う有効相互作用を記述する．位相空間にわたる積分をすると断面積は増幅し，指数的な減衰因子はある程度補われる．それでも，一般にその比率は小さいままである．これが宇宙のバリオン数の非対称性を説明するのに十分であるかどうかは興味深い問題である．ただ，電弱対称性の破れによる相転移の性質によってさらなる増幅効果が期待されない限り，バリオン数の破れを上の議論で説明するのは難しいであろう．

参考文献

1. 配位空間の一般的な性質については I.M. Singer, Phys. Scripta **T24**, 817 (1981); Commun. Math. Phys. **60**, 7 (1978) を参照されたい．

2. インスタントン解は A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwarz and Yu.S. Tyupkin, Phys. Lett. **B59**, 85 (1975) で発見された．インスタントンと他の古典解については A. Actor, Rev. Mod. Phys. **51**, 461 (1979); R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, Elsevier Science Ltd. (1982) を参照されたい．

3. ヤン–ミルズ作用の極値であるが極小はでない自己双対・反自己双対の解の存在は次の文献で示された．L.M. Sibner, R.J. Sibner and K. Uhlenbeck, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **86**, 8610 (1989); L. Sadun and J. Segert, Commun. Math. Phys. **145**, 391 (1992); J. Schiff, Phys. Rev. **D44**, 528 (1991).

4. インスタントンのまわりの半古典的な計算は G. 't Hooft, Phys. Rev. **D14**, 3432 (1976), Erratum *ibid.* **D18**, 2199 (1978) でなされた．インスタントンの計算の素晴らしいレビューとして S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press (1988) がある．また，これについては次の文献 M.A. Shifman, *Instantons in Gauge Theories*, World Scientific Pub. Co. (1994) も参照されたい．

5. インスタントンと θ パラメータの物理的な意味づけについては，次の文献を参照されたい．C.G. Callan, R. Dashen and D. Gross, Phys. Lett. **B63**, 334 (1976); R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **37**, 172 (1976); R. Jackiw, Rev. Mod. Phys. **49**, 681 (1977).

6. ハドロン構造とインスタントンとの関係については C.G. Callan, R. Dashen and D. Gross, Phys. Rev. **D17**, 2717 (1978); *ibid.* **D18** 4684 (1978); *ibid.* **D19**, 1826 (1979) を参照されたい．

7. θ パラメータによる CP 対称性の破れの効果は V. Baluni, Phys. Rev. **D19**, 2227 (1978); R.J. Crewther, P. Di Vecchia, G. Veneziano and E. Witten, Phys. Lett. **B88**, 123 (1979) で研究された.

8. θ が小さいことの 1 つの説明として，これを動的に決定する方法がある．これは次の文献で導入されたペッチェイ–クウィン (Peccei–Quinn) 対称性をもたらした. R.D. Peccei and H. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977); Phys. Rev. **D16**, 1791 (1977). この結果の 1 つとして，次で示されたアクシオンがある. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **40**, 223 (1978); F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **40**, 279 (1978). このアイデアの発展は J.E. Kim, Phys. Rev. Lett. **43**, 103 (1979); M.A. Shifman, A. Vainshtein and V. Zakharov, Nucl. Phys. **B166**, 493 (1980); A. Zhitnitsky, Sov. J. Nucl. Phys. **31**, 260 (1980); M. Dine, W. Fischler and M. Srednicki, Phys. Lett. **B104**, 199 (1981) に見られる. これらによってアクシオンが実験データと整合性をもつようになった.

9. 一般的な指数定理は M. Atiyah and I.M. Singer, Ann. Math. **87**, 485, 546 (1968); *ibid.* **93**, 119, 139 (1971); M. Atiyah and G.B. Segal, Ann. Math. **87**, 531 (1968) による．この定理は，本章での計算とよく似た熱方程式の手法をもちいて導くことができる．これについては P.B. Gilkey, *Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah–Singer Index Theorem*, CRC Press (1995) を参照されたい．指数定理は超対称的量子力学をもちいて導くこともできる. L. Alvarez-Gaumé, Commun. Math. Phys. **90**, 161 (1983); D. Friedan and P. Windey, Nucl. Phys. **B235**, 395 (1984) を参照されたい.

10. トフーフトの有効作用と弱いインスタントンによるバリオン数の破れは G.'t Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976) で得られた.

第 17 章

量子異常 II

17.1　量子異常と汎関数積分

量子異常（アノマリー）は古典的な対称性が量子論で保存されない場合に起きる．これは，必要なあるいは望まれるすべての対称性を保つような正則化が存在しないことに起因する．ファインマン図を使った摂動論のアノマリーについては 13 章で計算した．本章では，藤川によって与えられた汎関数積分によるアノマリーのエレガントな解釈について議論しよう．すでに見たように，場の量子論はユークリッド作用を指数関数の肩にもつ汎関数積分で定義できる．正則化と繰り込みについてのあらゆる問題は，この汎関数積分をどのように正則化できるかという問題と等価である．汎関数積分には 2 つの基本的な要素がある．つまり，古典的な作用と汎関数の積分測度である．対称性に異常がある場合，古典的な作用はこの対称性を保存する．一方，汎関数の積分測度はこの対称性の変換のもとで非自明に変換する．この積分測度の非自明性により量子異常が生じるというのが藤川の解釈である．

非アーベル型ゲージ場 V_μ とベクトル的に結合する無質量ディラック・フェルミオンの汎関数積分を考えよう．

$$
\begin{aligned}
Z &= \int [d\psi d\bar{\psi}]\, e^{-\mathcal{S}(\psi,\bar{\psi})}, \\
\mathcal{S}(\psi,\bar{\psi}) &= \int d^4x\ \bar{\psi}\gamma\cdot(\partial+V)\psi.
\end{aligned}
\tag{17.1}
$$

古典作用はカイラル $U(1)$ 対称性

$$\psi \to e^{-i\gamma_5\theta}\,\psi, \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi}\,e^{-i\gamma_5\theta} \tag{17.2}$$

をもつ．ここで，パラメータ θ は x^μ に依存しない．つぎに，$\psi' = e^{-i\gamma_5\theta(x)}\,\psi$, $\bar{\psi}' = \bar{\psi}\,e^{-i\gamma_5\theta(x)}$ で与えられる汎関数積分の変数変換を考えよう．ただし，$\theta(x)$ は座標の関数とする．これは単なる変数変換であるので，Z はこの変換のもとで不変である．したがって，

$$\begin{aligned} Z &= \int [d\psi' d\bar{\psi}']\, e^{-\mathcal{S}(\psi',\bar{\psi}')} \\ &= \int [d\psi d\bar{\psi}]\ \det(e^{2i\gamma_5\theta})\, e^{-\mathcal{S}(\psi,\bar{\psi})}\ \exp\left[-\int d^4x\ \theta(x)\partial_\mu J_{\mu 5}\right] \\ &= \int [d\psi d\bar{\psi}]\, e^{-\mathcal{S}(\psi,\bar{\psi})}\exp\left[2i\mathrm{Tr}(\gamma_5\theta) - \int d^4x\ \theta\partial_\mu J_{\mu 5}\right] \end{aligned} \tag{17.3}$$

となる．ここで，J^5_μ は $U(1)$ 軸性ベクトルカレント

$$J_{\mu 5} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \tag{17.4}$$

である．(グラスマン数を扱っているので，ヤコビアンは逆変換の行列式となる.）古典作用の不変性から古典的な保存則 $\partial_\mu J_{\mu 5} = 0$ が得られる．(17.3) で測度の変換によるヤコビアン $\det(e^{2i\gamma_5\theta})$ が付加的な寄与として現れていることに注意しよう．(17.3) の結果を (17.1) と比較すると，ウォード–高橋 (WT) 恒等式

$$\int [d\psi d\bar{\psi}]\, e^{-\mathcal{S}(\psi,\bar{\psi})}\left[\int d^4x\ \theta\partial_\mu J_{\mu 5} - 2i\mathrm{Tr}(\gamma_5\theta)\right] = 0 \tag{17.5}$$

を得る．$\mathrm{Tr}(\gamma_5\theta)$ は汎関数のトレースとディラック行列のトレースが関与し，適切な正則化のもとで計算されなければならない．この計算は前章で与えられ，その結果は

$$\mathrm{Tr}(\gamma_5\theta) = \frac{1}{16\pi^2}\int d^4x\ \theta\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) \tag{17.6}$$

となる．よって，WT 恒等式は

$$\int [d\psi d\bar{\psi}]\, e^{-\mathcal{S}(\psi,\bar{\psi})}\int d^4x\ \theta\left[\partial_\mu J_{\mu 5} - \frac{i}{8\pi^2}\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu})\right] = 0 \tag{17.7}$$

となる．相関関数の WT 恒等式は，ソース項を汎関数積分に挿入して同様の手続きを行うことで得られる．軸性 $U(1)$ カレントが保存しないことは，こ

の対称性が量子レベルで保たれないことを示している．上式から量子有効作用の変分は

$$\delta_\theta \Gamma = \int d^4x \; \theta \, \frac{i}{8\pi^2} \, \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) \tag{17.8}$$

と読み取ることができる．これは 13 章でファインマン図をもちいて計算した結果と同じである．

ここまで $U(1)$ 変換の計算を示したが，アノマリーに対するこの手法は非アーベル型対称性にも適用できる．その場合，再度 $\mathrm{Tr}(\gamma_5\theta)$ が現れる．ただし，$\theta = -it^a\theta^a(x)$ は非アーベル型の変換パラメータであり，トレースは，汎関数，ディラック行列およびリー代数行列の積に関するトレースである．また，このときベクトルゲージ場と軸性ベクトルゲージ場の双方を含むことができる．計算結果は (13.33) で与えられたアノマリーについてのバーディーンの式となる．

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma_5\theta) = -\frac{1}{8\pi^2}\int d^4x \; \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Str}\Bigg[\varphi\Bigg(&\frac{1}{4}F_{V\mu\nu}F_{V\alpha\beta} + \frac{1}{12}F_{A\mu\nu}F_{A\alpha\beta} \\ &- \frac{2}{3}(A_\mu A_\nu F_{V\alpha\beta} + A_\mu F_{V\nu\alpha}A_\beta + F_{V\mu\nu}A_\alpha A_\beta) \\ &+ \frac{8}{3}A_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta\Bigg)\Bigg].\end{aligned} \tag{17.9}$$

(軸性アノマリーは $\mathrm{Tr}(\gamma_5\theta)$ を $2i$ 倍したものとなる．ここで，$F_{V\mu\nu}$ と $F_{A\mu\nu}$ は 13 章の式 (13.2) で与えられている.)

17.2　量子異常と指数定理

量子異常と指数定理の間には簡単で非常にエレガントな関係がある．これは粒子のラグランジアンの運動項に現れる微分演算子についての関係である．この一例は前章ですでに見た．つまり，4 次元のディラック演算子の指数は軸性 $U(1)$ 変換のアノマリーの積分 $\mathrm{Tr}(\gamma_5)$ で与えられた．この結果は他の次元にも一般化できる．

$\mathcal{M}$ をユークリッド計量をもつ $2n$ 次元の多様体とする．ディラックの γ 行列は代数

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu}\mathbf{1} \tag{17.10}$$

で定義できる．これは具体的には $(2^n \times 2^n)$ 行列で実現できる．このときカイラリティ行列（つまり γ_5 に対応する行列）は

$$\gamma_{2n+1} = i^n \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{2n} \tag{17.11}$$

で与えられる．（ここで，γ_{2n+1} の定義を 4 次元の γ_5 の定義から少し変えた．4 次元では，$\epsilon^{0123} = 1$ とするのが便利であったが，一般化に際しては $\epsilon^{12\cdots 2n} = 1$ とするほうが簡単である.）$2n$ 次元のディラック・スピノールは 2^n 成分をもち，そのカイラル射影は

$$\psi_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_{2n+1})\,\psi \tag{17.12}$$

で定義される．ディラック演算子 $\gamma \cdot D$ の指数は正のカイラリティーをもつ規格化可能なゼロモードの数 (n_+) から負のカイラリティーをもつ規格化可能なゼロモードの数 (n_-) を引いたものであり，これは $\mathrm{Tr}(\gamma_{2n+1})$ で与えられる．このことは次の計算から直接示すことができる．

$$n_+ - n_- = \int_{\mathcal{M}} \hat{A}(\mathcal{R}) \wedge Ch(F). \tag{17.13}$$

ここで，$\hat{A}(\mathcal{R})$ と $Ch(F)$ はそれぞれ 14 章で定義された $\hat{A}$-種数の特性類とチャーン指標である．この結果はアティヤとシンガーによる一般的な指数定理の特別な場合に相当する．軸性 $U(1)$ 変換は

$$\psi \to \exp(-i\gamma_{2n+1}\theta)\,\psi \tag{17.14}$$

で与えられ，これらの変換のもとで理論のアノマリーは

$$2\,\mathrm{Tr}(\gamma_{2n+1}\theta) = 2\int_{\mathcal{M}} \theta\ \hat{A}(\mathcal{R}) \wedge Ch(F) \tag{17.15}$$

で与えられる．これより指数密度がアノマリーを与えることがわかる．

非アーベル型変換のアノマリーも指数密度と関係している．以下でみるように，$2n$ 次元のフェルミオン理論では $(2n+2)$ 次元の指数密度（ここでは $\mathcal{I}_{2n+2}$ で表す）が対応する．したがって，4 次元の理論では 6 次元の指数密度から考えなければならない．これは

$$\mathcal{I}_6 = -\frac{i}{48\pi^3}\mathrm{Tr}F^3 + \frac{i}{384\pi^3}\mathrm{Tr}F\,\mathrm{Tr}\mathcal{R}^2 \tag{17.16}$$

で与えられる.（表記の簡単のため，ウェッジ積の記号は省略した.）まず，$\mathrm{Tr}F^3$ 項を考えよう．ビアンキ恒等式から $d\mathrm{Tr}F^3 = \mathrm{Tr}(DF\,F^2 + F\,DF\,F + F^2\,DF) = 0$ であることに注意すると，少なくとも局所的には，

$$-\frac{i}{48\pi^3}\mathrm{Tr}F^3 = d\omega_5 \tag{17.17}$$

と書けることが期待される．この式で定義された ω_5 はチャーン–サイモンズ 5-形式である．この値やその他のチャーン–サイモンズ微分形式を計算する簡便な方法を以下に示そう．0 と 1 の間の実数値をとるパラメータ s をもちいて，$A_s = sA$ とする．これに対応する曲率あるいは場の強さは $F_s = sF + (s^2 - s)A^2$ であり，$dF_s/ds = dA + 2sA^2 = D_sA$ をみたす．ここで，D_s は A_s についての共変微分である．つまり，ある 1-形式 C に対して $D_sC = dC + sAC + CsA$ となる．ビアンキ恒等式は $D_s \wedge F_s = 0$ である．よって，明らかに

$$\begin{aligned}\frac{i^{n+1}}{(2\pi)^{n+1}(n+1)!}\mathrm{Tr}F^{n+1} &= \int_0^1 ds\ \frac{d}{ds}\frac{i^{n+1}}{(2\pi)^{n+1}(n+1)!}\mathrm{Tr}F_s^{n+1}\\ &= \int_0^1 ds\frac{i^{n+1}}{(2\pi)^{n+1}(n+1)!}\,(n+1)\mathrm{Tr}D_sAF_s^n\\ &= \int_0^1 ds\frac{i^{n+1}}{(2\pi)^{n+1}(n+1)!}\,(n+1)d\,\mathrm{Tr}AF_s^n\\ &= d\omega_{2n+1}\end{aligned} \tag{17.18}$$

と書ける．ただし，

$$\omega_{2n+1} = \int_0^1 ds\frac{i^{n+1}}{(2\pi)^{n+1}n!}\mathrm{Tr}AF_s^n \tag{17.19}$$

である．$F_s = sF + (s^2 - s)A^2$ をもちいると，積分を評価することでチャーン–サイモンズ微分形式 ω_{2n+1} を求められる．具体的に $n = 2$ の場合を書くと

$$\begin{aligned}\omega_5(A) &= -\frac{i}{48\pi^3}\mathrm{Tr}\left(AdAdA + \frac{3}{2}A^3dA + \frac{3}{5}A^5\right)\\ &= -\frac{i}{48\pi^3}\mathrm{Tr}\left(AF^2 - \frac{1}{2}A^3F + \frac{1}{10}A^5\right)\end{aligned} \tag{17.20}$$

となる．ω_5 はゲージ不変ではない．しかし，この外微分は $\mathrm{Tr}F^3$ に比例し，ゲージ不変なので，$d[\omega_5(A^g) - \omega_5(A)] = 0$ となる．$A^g = gAg^{-1} - dgg^{-1}$

は A のゲージ変換である．これより，$\omega_5(A^g) - \omega_5(A)$ は 5 次の閉形式であることがわかる．これは実際に次のように計算できる．

$$\omega_5(A^g) - \omega_5(A) = d\alpha_4 + \frac{i}{480\pi^3}\mathrm{Tr}(dg\, g^{-1})^5,$$
$$\alpha_4 = -\frac{i}{48\pi^3}\,\mathrm{Tr}\Big[g^{-1}dg\,\Big(\frac{1}{2}AdA + \frac{1}{2}dAA + \frac{1}{2}A^3\Big) + \frac{1}{4}(g^{-1}dg\,A\,g^{-1}dg\,A) - \frac{1}{2}(g^{-1}dg)^3A\Big]. \quad (17.21)$$

ここで，α_4 は 4-形式である．無限小変換 $g \approx 1 - \theta$, $A \to A + D\theta$ のもとで，これは

$$\alpha_4 \approx \frac{i}{48\pi^3}\mathrm{Tr}\left[d\theta\left(\frac{1}{2}AdA + \frac{1}{2}dAA + \frac{1}{2}A^3\right)\right] \quad (17.22)$$

と書ける．(13.31) と比較すると，カイラリティが左のフェルミオンのアノマリーは $2\pi i\int\alpha_4$ と表すことができる．

$\omega_5(A^g) - \omega_5(A)$ はアノマリーの積分表現あるいは有限なゲージ変換 g のもとでの有効作用の変化分とみなすことができる．WZ 整合性条件は無限小変換を成すために必要な可積分性の条件であり，これにより有限な変換のもとでの有効作用の変化が得られる．$\omega_5(A^g) - \omega_5(A)$ はすでに積分化されているので，(17.22) の表現は WZ 整合性条件に従うことは明らかであろう．

有限ゲージ変換の結果は次のように簡単に表すことができる．4 次元空間において，$|x| \to \infty$ で $F \to 0$ と $g \to 1$ となる条件に従う場を考えよう．このとき $\mathcal{M}$ は実際には境界をもたないコンパクトな空間 ($\sim S^4$) となり，境界 $\partial\mathcal{D} = \mathcal{M} = S^4$ をもつ 5 次元空間 $\mathcal{D}$（$\mathbf{R}^5$ 上の単位ディスク）を考えることができる．時空間から $\mathcal{D}$ への関数 g の拡張を U で表そう．つまり，$\partial\mathcal{D} = \mathcal{M}$ に制限された U は g となる．有限なゲージ変換のもとでの有効作用の変化は

$$\Delta\Gamma = 2\pi i\int_{\mathcal{D}}[\omega_5(A^U) - \omega_5(A)] \quad (17.23)$$

と表される．よって，カイラリティが左のフェルミオンのディラック行列式は

$$\det(\gamma\cdot D^g) = \det(\gamma\cdot D)\,\exp\left(2\pi i\int_{\mathcal{D}}[\omega_5(A^U) - \omega_5(A)]\right) \quad (17.24)$$

と書ける．

$[\omega_5(A^U)-\omega_5(A)]$ には項

$$\Omega^{(5)}=\frac{i}{480\pi^3}\mathrm{Tr}(dU\,U^{-1})^5 \tag{17.25}$$

が含まれる．14 章でみたように，この 5-形式は閉じているが完全ではない．これは，$\mathcal{H}^5(G)$ の要素の $\mathcal{D}$ への引き戻しである．したがって，(17.23) を積分して 4 次元時空間上で定義される量を得ることはできない．これは，アノマリーは局所的なカウンター項で除去できないことを示している．よって，4 次元アノマリーを 6 次元の指数定理で同定することができた．$2\pi i\int_{\mathcal{D}}[\omega_5(A^U)-\omega_5(A)]$ の表現は，異なる形ではあるが，ヴェスとズミノによるアノマリーの積分計算によって最初に得られた．そのため，これはヴェス–ズミノ項と呼ばれる．ここで与えられた形はウィッテンによるものである．微分形式は計量によらないので，式 (17.23)–(17.25) では $\mathcal{M}$ がトポロジカルに S^4 であることしか必要としない．したがって，これらの公式は，$|x|\to\infty$ の極限で場の強さがゼロになるとすると，$\mathcal{M}=\mathbf{R}^4$ にも適用される．

有限なアノマリー (17.23) を特定するには，g を 4 次元から 5 次元空間 $\mathcal{D}$ に拡張して U を考えなければならない．(ゲージ場は α_4 にしか現れないので，拡張する必要はない．) g をディスク $\mathcal{D}$ へ拡張する方法は無数にある．2 つの異なる拡張 U_1, U_2 を考えよう．5 次元球面の赤道を時空間とみなし，2 つの U がその上半球面，下半球面で定義されているとする．言い換えると，始めの拡張では $\mathcal{D}$ を上半球面とし，もう一方の拡張ではこれを下半球にとるものとする．このとき有限なアノマリーの差は

$$\Delta\Gamma(U_1)-\Delta\Gamma(U_2)=\oint_{S^5}\Omega^{(5)}(U) \tag{17.26}$$

で与えられる．ただし，上半球で $U=U_1$，下半球で $U=U_2$ となる．赤道上では $U_1=U_2=g$ なので，S^5 上の関数の接続に困難は生じない．積分 (17.26) は写像 $U:S^5\to G$ の巻き数を与え，$\Pi_5(G)$ の要素とみなせる．これは整数であるので，5 次元空間への拡張の仕方からくる不定さは，式 (17.24) あるいは有効作用のベキ指数には影響を与えない．

カウンター項によってアノマリーを除去できない理由は $\Omega^{(5)}$ の項による．これはゲージ群 G についての $\mathcal{H}^5(G)$ の要素である．すなわち，これは完全形式では書けないので，時空間の局所関数の積分とならない．$\mathcal{H}^5(G)$ は，$SU(n)$

$(n \geq 3)$ を除くすべてのコンパクトリー群でゼロとなる．4 次元でアノマリーが起きるとすると，それはゲージ群が $SU(n)$ $(n \geq 3)$ の場合だけである．

17.3 標準模型における混合アノマリー

高次元の指数密度と非アーベル型変換のアノマリーの関係は一般に成り立つ．実際，公式 (17.24) を

$$\det(\gamma \cdot D^g) = \det(\gamma \cdot D)\, \exp\left(2\pi i[\omega_{2n+1}(A^U) - \omega_{2n+1}(A)]\right) \tag{17.27}$$

と一般化することができる．一般に，座標変換あるいは微分同相写像の対称性の量子的な破れに対応する重力アノマリーも存在し，これも高次元の指数密度から求めることができる．$(2n+2)$ 次元に対応する指数密度 $\mathcal{I}_{2n+2}$ は $(2n+2)$ 次の閉形式なので，

$$\mathcal{I}_{2n+2} = d\omega_{2n+1} \tag{17.28}$$

と定義できる．ここで，チャーン–サイモンズ形式 ω_{2n+1} はゲージ場と重力場に依存する．変換されたゲージ場と重力場で表されたチャーン–サイモンズ形式を $\tilde{\omega}_{2n+1}$ とする．このとき $2n$ 次元空間 $\mathcal{M}^{2n}$ 上のカイラリティが左のディラック行列式は

$$\det(\gamma \cdot \tilde{D}) = \det(\gamma \cdot D)\, \exp\left(2\pi i \int_{\mathcal{D}} [\tilde{\omega}_{2n+1} - \omega_{2n+1}]\right) \tag{17.29}$$

となる．ただし，$\partial\mathcal{D} = \mathcal{M}^{2n}$ である．指数密度 $\mathcal{I}_{2n+2}$ は $2n$ 次元のアノマリー多項式と呼ばれる．これはアノマリーがないことを確認するのにとても便利である．つまり，場に割り当てられた表現をもちいてトレースを計算したときに，この多項式がゼロとなればアノマリーは消える．実際上，これはアノマリーそのものの表式をもちいるよりもずっと簡単である．弦理論のアノマリー相殺はこの手法によって証明された．

4 次元の完全な指数密度は

$$\mathcal{I}_4 = -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}F^2 + \frac{1}{192\pi^2}\mathrm{Tr}\mathcal{R}^2 \tag{17.30}$$

で与えられる．これは 2 次元のカイラルフェルミオンが重力アノマリーと非

アーベル型ゲージ変換のアノマリーをもつことを示している．

6 次元に対応する指数密度 (17.16) は，4 次元理論ではゲージアノマリーとゲージ・重力場の混合アノマリーが存在することを示している．これは，ゲージ場がゼロでないときにには，座標変換のもとでの有効作用の変化が消えないことを意味する．4 次元では純粋な重力アノマリーは存在しない．

標準模型にはゲージアノマリーがないことはすでに確認した．しかし，標準模型では，それぞれのフェルミオンの $U(1)_Y$ チャージはゼロではないので，公式 (17.16) の $\mathrm{Tr}\, F$ 項による混合アノマリーが起きる可能性がある．実際には，フェルミオンに割り当てられた電荷をもちいて各世代のクォークあるいはレプトンについてトレースをとると，$\mathrm{Tr}\, Y = 0$ となる．したがって，標準模型では混合アノマリーもゼロとなり，問題なく重力と結合させることができる．

17.4　QCD フレーバーアノマリーの有効作用

強い相互作用の理論つまり QCD はクォークとグルーオンの理論である．これらは最終的にはカラー 1 重項の束縛状態となり，メソン，バリオン，グルーボールを与える．これは漸近状態の観測量である．カラー状態の閉じ込めについてのこの描像はメソンとバリオンの有効理論を導くのにある種の必要条件を与える．例えば，電弱アノマリーのなかにはクォークとレプトンの間で相殺するものがある．クォークが閉じ込められている低エネルギー領域では，レプトンからのアノマリーは変わらない．したがって，メソンとバリオンの有効作用には，QCD のフレーバーアノマリーを表す項が含まれていて，それによってレプトンからのアノマリーが相殺されているはずである．そうでなければ，閉じ込めの描像に矛盾が生じる．これを言い換えて，次のように議論することができる．つまり，QCD に限らず任意の理論において，理論の異なる相の間でアノマリーの一致があるべきである．このアノマリー一致の条件は，ゲージ理論の相を理解する試みの 1 つとして，トフーフトによって最初に提唱された．ただし，これまでの簡単な議論には重要な注意点が 1 つある．アノマリーは，短距離における特異点の正則化と関係して，高エネル

ギー効果として現れた．したがって，これが低エネルギー有効理論においても同じになるという理由はまったくないと言えそうである．しかし，その位相幾何学的な性質から，アノマリーはエネルギー・スケールの変化のもとで不変であることがわかるので，アノマリーは低エネルギー理論でも同じでなければならない．言い換えると，もしアノマリーが高エネルギーにおいて理論の 2 つのセクターで相殺するのであれば，低エネルギーにおいても，たとえセクターの 1 つが異なる相にあっても，アノマリーは相殺しなければならない．同じ結論を導くエレガントな議論がもう 1 つある．まず，三角ダイヤグラムの計算において，アノマリーはダイヤグラムの虚部から得られることに注意しよう．1 ループ・ダイヤグラムの虚部は，ユニタリー性の結果 (12.111) から，ツリーレベルの断面積に関係しており，これは有効理論の漸近状態をもちいて計算できる．したがって，アノマリーは高エネルギーの効果とも低エネルギーの効果ともみなすことができる．このため，理論の高エネルギーおよび低エネルギー領域の両者でアノマリーは一致しなければならない．

具体的に QCD の場合に戻って，フレーバーアノマリーがメソンとバリオンでどのように表されるかを考えよう[1]．有効理論はカイラル対称性の破れ $U_L(3) \times U_R(3) \to U_V(3)$ から導かれ，12 章で議論したように，メソンの場 U で表される．南部–ゴールドストン・ボソンはゲージ変換のパラメータのように振る舞う．(このため，ヒッグス機構においては，ユニタリーゲージをとると，これらの場がゲージ場に吸収される．) したがって，QCD の有効作用は $\omega_5(A^U) - \omega_5(A)$ の項をもつことが予想される．ここで，U はカイラル対称性の破れの南部–ゴールドストン場であり，A はフレーバー対称性[2]についてのゲージ場である．この予想はほとんど正しいが完全には正しくない．その理由は，この表現は左巻きフェルミオンのアノマリーを与えるので，対称性の破れのパターン $U_L(3) \to 1$ に対応しているからである．U についてのカイラル変換則は $U \to U' = g_L U g_R^\dagger$ で与えられる．よって，(17.21) より，U に関する項は次の形でなければならないことがわかる．

$$\Gamma_{WZ} = -i\frac{N}{240\pi^2}\int_D (\mathrm{Tr}(dU\,U^{-1})^5 + 2\pi N[\alpha_4(U^{-1}, A_L)$$

[1] ［訳註］QCD の有効作用については 12.10 節を参照されたい．

[2] ［訳註］$U_L(3) \times U_R(3)$ で与えられるフレーバー（カイラル）対称性のこと．

$$- \alpha_4(U, A_R)] + \Gamma_{count}. \qquad (17.31)$$

ここで，因子 N はカラーの数に対応し，フレーバーアノマリーの計算においてクォークの縮退度を与える．QCD では $N = 3$ であるが，ここではより一般的な結果を示した．Γ_{count} は，アノマリーのバーディーンの式のように，ゲージ変換を受けない方向のフレーバーアノマリーがゲージ不変であるために，必要であれば，追加することができるカウンター項である．この項は Γ_{WZ} の変換を考えると計算することができ，最終的な結果は以下のようになる．

$$\begin{aligned}
\Gamma_{WZ} = &-\frac{iN}{240\pi^2}\int_D (\mathrm{Tr}(dU\,U^{-1})^5 \\
&+\frac{iN}{48\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}[(A_L dA_L + dA_L A_L + A_L^3)dUU^{-1}] \\
&+\frac{iN}{48\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}[(A_R dA_R + dA_R A_R + A_R^3)U^{-1}dU] \\
&-\frac{iN}{96\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}[A_L dUU^{-1}A_L dUU^{-1} - A_R U^{-1}dU A_R U^{-1}dU] \\
&-\frac{iN}{48\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}[A_L(dUU^{-1})^3 - A_R(U^{-1}dU)^3] \\
&-\frac{iN}{48\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}[dA_L dU A_R U^{-1} - dA_R d(U^{-1})A_L U] \qquad (17.32) \\
&-\frac{iN}{48\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}[A_R U^{-1}A_L U(U^{-1}dU)^2 - A_L U A_R U^{-1}(dUU^{-1})^2] \\
&+\frac{iN}{48\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}[(dA_R A_R + A_R dA_R)U^{-1}A_L U \\
&\qquad\qquad - (dA_L A_L + A_L dA_L)U A_R U^{-1}] \\
&+\frac{iN}{48\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}[A_L U A_R U^{-1}A_L dUU^{-1} + A_R U^{-1}A_L U A_R U^{-1}dU] \\
&-\frac{iN}{48\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}[A_R^3 U^{-1}A_L U - A_L^3 U A_R U^{-1} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}U A_R U^{-1}A_L U A_R U^{-1}A_L].
\end{aligned}$$

ウィッテンによって最初に与えられたこの有効作用はフレーバーアノマリーが媒介するすべての過程を記述する．これは $U \leftrightarrow U^{-1}$, $A_L \leftrightarrow A_R$ のもとで

確かに符号を変える．また $U \leftrightarrow U^{-1}$, $\boldsymbol{x} \leftrightarrow -\boldsymbol{x}$ の組み合わせは，A_L, A_R のゲージ変換を除いて，対称的である．これは，強い相互作用が保つパリティに対応する．弱い相互作用のゲージ場はパリティ対称性を破るので，A_L, A_R にこの対称性を期待する理由はない．$\mathrm{Tr}(dUU^{-1})^5$ に比例する項はアノマリーによる純粋にメソンだけの過程を記述する．その例として，$K^+K^- \to \pi^+\pi^-\pi^0$ がある．

(17.32) のゲージ場は最終的には電弱ゲージ場に制限されなければならない．もし電磁場だけを考えるならば，ゲージ場に依存する項は

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{WZ} = \frac{e}{16\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}[A(dUU^{-1})^3 + A(U^{-1}dU)^3] \\
+ i\frac{e}{16\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}[dAA(dUU^{-1} + U^{-1}dU)] \\
- i\frac{e}{32\pi^2}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{Tr}[dAdUAU^{-1} + dAUAdU^{-1}]
\end{aligned} \tag{17.33}
$$

となる．U を展開すると，13 章で解析した $\pi^0 \to 2\gamma$ 崩壊の有効相互作用項を導くことが確認できる．

17.5 大域的あるいは非摂動的な量子異常

ここまで議論してきた対称性変換のアノマリーは，無限小変換のもとでの有効作用の変化あるいはフェルミオン行列式で表された．これは，無限小変換に対するファインマン図あるいはフェルミオン測度のヤコビアンから計算できる．有限変換のもとでの変化分は，アノマリーを積分することで得られる．可積分性についての整合性条件は，13 章で与えられた WZ 条件式であり，その積分表現は式 (17.23) あるいは (17.29) で得られた．しかし，恒等変換（単位元）と連続的に連結しない変換があるので，無限小変換を積分するだけでは得られない変換が存在する．そのような変換のもとでは，フェルミオン測度あるいはフェルミオン行列式が非自明に変化することが可能となる．これは，4 次元の $SU(2)$ ゲージ理論の古典的な場合について，ウィッテンによって示された．このアノマリーは一般に，大域アノマリーあるいは非摂動アノマリーと呼ばれる．

4 次元 $SU(2)$ ゲージ場においては，摂動的なアノマリーは存在しない．これは $d^{abc} \sim \mathrm{Tr}(t^a t^b t^c + t^a t^c t^b) = 0$ となるためである．したがって，$SU(2)$ ゲージ理論はカイラルフェルミオンの 2 重項（ダブレット）をもちいて矛盾なく定義できると期待できる．しかし，そのような理論は大域アノマリーのために矛盾する理論となる可能性がウィッテンによって示された．

いま考えているゲージ理論では，ゲージ変換は $SU(2)$ 行列 $g(x) : \mathbf{R}^4 \to SU(2)$ で与えられる．いつもどおり，ここでも $|x| \to \infty$ で $g \to 1$ となる変換を考える．この条件のもとでの関数 $g(x)$ は S^4 から $SU(2)$ への関数と同じである．これらのホモトピー類は $\Pi_4[SU(2)]$ で与えられると考えられ，これは $\mathbf{Z}_2$ となる．つまり，4 次元 $SU(2)$ ゲージ理論には 2 つのタイプのゲージ変換があることがわかる．1 番目のタイプの変換は，$\Pi_4[SU(2)] = \mathbf{Z}_2$ の自明な要素に対応する．すなわち，そのような変換はいずれも，時空間のあらゆる点で，なめらかな変形によって恒等変換になる．したがって，これらは恒等変換に連結しており，そのアノマリーはすべて無限小変換から計算できる．($SU(2)$ の場合，そのようなアノマリーは存在しない.）2 番目のタイプの変換は $\mathbf{Z}_2$ の非自明な要素に属する．したがって，定義より，これらの変換は時空間のあらゆる点で，なめらかな変形によって恒等変換になることはない．ホモトピー類が非自明である変換を $\tilde{g}(x)$ としよう．ホモトピー群は $\mathbf{Z}_2$ なので，$\tilde{g}(x)$ を 2 回続けて変換した $\tilde{g}^2(x)$ は $\mathbf{Z}_2$ の自明な要素に対応し，恒等変換に変形することができる．

$\tilde{g}$ のもとでのフェルミオン測度の変化は，無限小変換からは計算できない．A と $A^{\tilde{g}}$ のゲージポテンシャルは物理的には同じ配位に対応する．ポテンシャルの配位空間は連結しており，したがって，$A(x,0) = A(x)$ から $A(x,1) = A^{\tilde{g}}(x)$ への経路 $A(x,\tau)$ を構成することができる．このとき，指数定理をもちいると，A から $A^{\tilde{g}}$ へ移る際にフェルミオン測度の符号が変わることがウィッテンによって示された．つまり，

$$\det(\gamma \cdot D^{\tilde{g}}) = -\det(\gamma \cdot D) \tag{17.34}$$

となる．ゲージ場の積分を行列式の符号が同じである領域に制限することはできないので，上式により理論は整合性を失う．

つぎに，この結果を大域アノマリーと通常の摂動アノマリーを関係づける

別の議論を使って示そう．$SU(3)$ に埋め込まれた $SU(2)$ ゲージ群を考える．$\Pi_4[SU(3)]=0$ なので，恒等変換に変形できない変換はない．つまり，この拡張された理論には大域アノマリーはない．ところが，$SU(2)$ は摂動的にはアノマリー・フリーであるが，$SU(3)$ はそうならない．したがって，$SU(2)$ 理論の大域アノマリーは，通常の結果 (17.24) から求めることもできる．$SU(3)$ に拡張すると，フェルミオンの 3 重項を考えなければならない．これは，フェルミオンがもともと $SU(2)$ のもとで 2 重項を成していたからである．追加されたフェルミオン場は $SU(2)$ のもとで 1 重項を成すので，$SU(2)$ 変換についての理論の整合性の議論に影響を与えない．一般の $SU(3)$ 変換 $A\to A^g$ のもとで，

$$
\begin{aligned}
\det(\gamma\cdot D^g) &= \det(\gamma\cdot D)\,\exp\left[i\,\Gamma(U,A)\right],\\
\Gamma(U,A) &= 2\pi\int_{\mathcal{D}}[\omega_5(A^U)-\omega_5(A)]\\
&= 2\pi\left[\int_{\mathcal{M}}\alpha_4(g,A)+\int_{\mathcal{D}}\Omega^{(5)}(U)\right]
\end{aligned}
\tag{17.35}
$$

となる．ここで，U は $\partial\mathcal{D}=\mathcal{M}$ で $U=g$ となる特性をもつ．ゲージ場は α_4 にだけ現れ，ここではこれを $SU(2)$ ゲージ場に固定してとることができる．すると，$SU(2)$ では摂動アノマリーはゼロなので，α_4 はゼロとなる．よって，以下の議論では

$$
\Gamma(U,A)=\Gamma(U)=2\pi\int_{\mathcal{D}}\Omega^{(5)}(U) \tag{17.36}
$$

ととれる．

g のディスク $\mathcal{D}$ への拡張を 2 つ考えよう．例えば，同じ境界値 g をもつ U と U' を考えると，$\Gamma(U)-\Gamma(U')$ の差は (17.26) 以下の議論から 2π の整数倍となる．この整数は写像 $S^5\to SU(3)$ の巻き数であり，$\Pi_5[SU(3)]=\mathbf{Z}$ の要素を表す．あるいは，$\partial\mathcal{D}=\mathcal{M}$ 上で $V=1$ となる $V:\mathcal{D}\to SU(3)$ をもちいて $U'=UV$ と表すことができる．このような関数は S^5 から $SU(3)$ への写像と同じであるので，再び $S^5\to SU(3)$ の巻き数を得る．非自明な写像 $\mathcal{D}\to SU(3)$ を生成する $\partial\mathcal{D}=\mathcal{M}$ 上で $V_1=1$ となる基本写像 V_1 を考える．V_1 の巻き数は 1 なので，

$$
\Gamma(V_1)=2\pi \tag{17.37}
$$

となる.

g のディスク $\mathcal{D}$ への異なる 2 つの拡張が互いに整合性をもつことが示されたので，以下では公式 (17.35) にある 1 つの U を考えるだけで十分である．$U:\mathcal{D}\to SU(3)$ はディスク $\mathcal{D}$ から $SU(3)$ への写像を与える．この写像をもちいて 5-形式を $\mathcal{D}$ に引き戻して積分する代わりに，ここでは (17.36) を $SU(3)$ のディスクの像における $\Omega^{(5)}$ の積分と考えよう．

これは $SU(3)/SU(2)$ の球面上の積分とみなせることを以下で議論する．まず，すべての $h\in SU(2)\subset SU(3)$ について $\Gamma(Uh)=\Gamma(U)$ となることは簡単に確認できる．これは，$SU(2)$ のとき摂動アノマリーはゼロとなるためである．したがって，Γ は $\mathcal{D}$ から $SU(3)/SU(2)$ への写像によって定義される．関数 U の境界値は $SU(2)$ で与えられるので，ディスク自体は $SU(3)$ にあるものの，ディスク $\mathcal{D}$ の像は，$SU(3)/SU(2)$ にある球面 S^5 となる．さらに，積分 $\Gamma(U)$ は 2 次の閉形式なので，この積分は U の微小変形のもとで不変である．したがって，これは写像 $S^5\to SU(3)/SU(2)$ についてのトポロジカル不変量となる．すべての要素 $\Pi_5[SU(3)/SU(2)]=\mathbf{Z}$ に対して，これは実数を与える.（空間 $SU(3)/SU(2)$ は 5 次元球面である.）また，5-形式を展開すると，

$$\Gamma(UU')=\Gamma(U)+\Gamma(U') \tag{17.38}$$

となることがわかる．ただし，U と U' の境界値は $SU(2)$ で与えられる．

つぎに，非自明な $SU(2)$ 変換 $\tilde{g}(x)$ を考えよう．この変換を $SU(2)$ に限られたディスク $\mathcal{D}$ の全体に拡張することはできないが，$\partial\mathcal{D}=\mathcal{M}$ で $\tilde{U}=\tilde{g}(x)$ となる $\tilde{U}:\mathcal{D}\to SU(3)$ を求めることはできる．フェルミオン行列式の変換を求めるには，$\Gamma(\tilde{U})$ が必要である．この値は 14 章で議論したホモトピー完全系列をもちいて計算することができる．この計算に必要な系列の一部は次のようになる．

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Pi_5[SU(3)] & \to & \Pi_5\left[\frac{SU(3)}{SU(2)}\right] & \to & \Pi_4[SU(2)] & \to & 0 \\
 & & \mathbf{Z} & \to & \mathbf{Z} & \to & \mathbf{Z}_2 & \to & 0 \\
 & & & & 2k+1 & \to & 1 & \to & 0 \\
 & & n & \to & 2k & \to & 0 & \to & 0
\end{array} \tag{17.39}$$

系列の完全性から，ゼロに写像されるものはその前の写像の像でなければなら

ない．したがって，$\mathbf{Z}_2$ の非自明な要素 1 は $\Pi_5[SU(3)/SU(2)]$ のある要素の像でなければならない[3]．これらの要素はいずれもその前の写像の像ではないので，すべての $\Pi_5[SU(3)]$ は $\Pi_5[SU(3)/SU(2)]$ の何か別の要素に写像されなければならない．よって，ホモトピーの要素の構成法から，$\Pi_5[SU(3)/SU(2)]$ の偶数の巻き数はすべて $\Pi_5[SU(3)]$ の像であることがわかる．$\Pi_5[SU(3)/SU(2)]$ の奇数の巻き数は，$\Pi_5[SU(3)]$ の要素の像ではなく，$\Pi_4[SU(2)]$ の非自明な要素に写像される．

同じ境界値 $\tilde{g}$ を与える $\tilde{U}$ は無数にあり，これらは $\Pi_5[SU(3)/SU(2)]$ の異なる要素に対応している．$\tilde{g}$ の拡張のうち，$\Pi_5[SU(3)/SU(2)]$ の巻き数が 1 の非自明な基本写像を $\tilde{U}_1$ で表そう．関数 $\tilde{U}_1^2$ は $\Pi_4[SU(2)]$ の自明な要素に対応し，境界 $\partial\mathcal{D}$ で恒等変換に変形できる．境界は恒等変換であり，$SU(2)$ の要素でないので，対応するディスクの像は $SU(3)$ にある球面となる．よって，(17.37) と (17.38) をもちいると，次の結果を得る．

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\tilde{U}_1) &= \frac{1}{2}\left[\Gamma(\tilde{U}_1) + \Gamma(\tilde{U}_1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\,\Gamma(\tilde{U}_1^2) \\
&= \frac{1}{2}\,\Gamma(V_1) \\
&= \pi.
\end{aligned}
\tag{17.40}
$$

これは (17.34) の結果を与える．

標準模型では，弱い相互作用の $SU(2)$ 群に対するフェルミオンの 2 重項の数は偶数である．したがって，標準模型には大域アノマリーはない．ゲージ群や素粒子の編成を変えて標準模型の拡張を探る際には，ゲージ変換の摂動アノマリーに加えて，大域アノマリーがないことを確認しなければならない．この要請は模型の構成にある付加的な拘束条件を課す．

大域アノマリーについてのこれまでの議論が，別の次元および別のフェルミオン表現に一般化されることは容易にわかる．n 次元においてゲージ群 G を考えると，$\Pi_n(G)$ がゼロでないときに，恒等変換に連結しないゲージ変換

---

[3] ［訳註］ここで $\mathbf{Z}_2$ の自明な要素は 0 となっており，これは式 (17.39) の最後の系列に対応している．

が存在する．リー群のホモトピー群（そのいくつかは 14 章に表示されている）から，これは多くの次元で起きることがわかる．また，あるフェルミオン表現が大域アノマリーを持つかどうかについてもここでの議論と同様な手法で調べることができる．

17.6 ヴェス–ズミノ–ウィッテン (WZW) 作用

ヴェス–ズミノ–ウィッテン (WZW) 作用は 2 次元のアノマリーと密接に関係し，応用に富む．この作用は非アーベル型のボソン化にもちいられる．また，これは 2 次元の共形場理論を定義する．つまり，さまざまな有理共形場の理論は WZW 模型あるいはそのゲージ変換として得られる．

WZW 作用の場の変数は可逆行列 $M(x)$（つまり $GL(N,\mathbf{C})$ の要素または $GL(N,\mathbf{C})$ の部分群やコセットの要素）であるので，WZW 作用はシグマ模型の特定のタイプであるとみなせる．このシグマ模型の標的空間を G で表そう．以下ではこの作用をユークリッド計量をもつ 2 次元空間で考える．（ミンコフスキー計量については，幾何学的量子化を扱う 20 章で簡単に取り上げる.）WZW 作用は

$$\mathcal{S}_{WZW} = \frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{M}^2} d^2x\,\sqrt{g}\,g^{ab}\,\mathrm{Tr}(\partial_a M\partial_b M^{-1}) + \Gamma[M], \qquad (17.41)$$

$$\Gamma[M] = \frac{i}{12\pi}\int_{\mathcal{M}^3} d^3x\,\epsilon^{\mu\nu\alpha}\,\mathrm{Tr}(M^{-1}\partial_\mu M M^{-1}\partial_\nu M M^{-1}\partial_\alpha M) \quad (17.42)$$

で与えられる．ここで，$\mathcal{M}^2$ は場と作用が定義される 2 次元空間を表す．一般に，これは計量テンソル g_{ab} をもつ曲がった多様体である.（g^{ab} は逆計量テンソル，g は行列 g_{ab} の行列式を表す.）$\mathcal{M}^2$ を閉じた多様体とする．$\mathbf{R}^2$ 上の場にこの作用をもちいることもできる．これは $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ での境界条件を $M \to 1$（あるいは方向によらないある固定値）と選ぶことによって可能である．位相幾何学的にはそのような場は閉じた多様体上の場と等しい．$\Gamma[M]$ はヴェス–ズミノ項である．これは $\mathcal{M}^2$ を境界にもつ 3 次元空間 $\mathcal{M}^3$ での積分によって定義される．被積分関数は 3 次の微分形式であり，積分に際し，計量的な要素は必要でない．ただし，場を 3 次元空間 $\mathcal{M}^3$ に拡張する必要がある．境界 $\mathcal{M}^2$ を同じくする 3 次元空間 $\mathcal{M}^3$ は無数にある．すなわち，場を 3

次元空間 $\mathcal{M}^3$ に拡張する方法は無数にある．M と M' を場の 3 次元空間への異なる拡張とすると，$M' = MN$ と書ける．ただし，$\mathcal{M}^3$ の境界 $\mathcal{M}^2$ 上で $N = 1$ である．このとき，直接的な計算から

$$\Gamma[MN] = \Gamma[M] + \Gamma[N] - \frac{i}{4\pi}\int_{\mathcal{M}^2} d^2x\ \epsilon^{ab}\,\mathrm{Tr}(M^{-1}\partial_a M\,\partial_b N N^{-1}) \tag{17.43}$$

となることがわかる．最後の項は，$\mathcal{M}^2 = \partial\mathcal{M}^3$ で $N = 1$ となるためゼロとなる．

$\mathcal{M}^3$ の境界で $N = 1$ なので，N は閉じた 3 次元空間から G への写像と同じである．一般に，そのような写像は異なるホモトピー類に分類される．例えば，$\mathcal{M}^2 = S^2$（あるいは上述の境界条件をみたす $\mathbf{R}^2$）とすると，$\mathcal{M}^3$ は 3 次元の球体となる．その処方された振る舞いから，N は 3 次元球面 S^3 から G への写像であることがわかる．すでに何度も見てきたように，このような写像のホモトピー類は $\Pi_3(G)$ で与えられる．G がコンパクトな非アーベル型リー群を含む場合，これはゼロにならない．特に，$SO(4)$ を除くすべての単純な非アーベル型リー群について，$\Pi_3(G) = \mathbf{Z}$ となる．ただし，$G = SO(4)$ の場合は $\Pi_3(G) = \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ である．写像 $N(x) : S^3 \to G$ の巻き数は

$$Q[N] = -\frac{1}{24\pi^2}\oint_{S^3} d^3x\ \epsilon^{\mu\nu\alpha}\,\mathrm{Tr}(N^{-1}\partial_\mu N N^{-1}\partial_\nu N N^{-1}\partial_\alpha N) \tag{17.44}$$

で与えられる．任意の $N(x)$ について $Q[N]$ は整数となる．そのため，$\Gamma[N]$ を求めるには 2 つの場合を議論しなければならない．N が恒等変換に近似できるとき，すなわち $\partial N N^{-1}$ について 1 次のオーダーであるとき，$\Gamma[N]$ はゼロである．したがって，恒等変換に連結したすべての N については，連続的な変換により $\Gamma[M]$ は $\mathcal{M}^3$ への拡張の仕方によらない量であることがわかる．これは，N がホモトピー的に自明な要素に属する場合である．一方，N がホモトピー的に自明でない場合，積分 $\Gamma[N]$ は写像 $N(x) : S^3 \to G$ の巻き数の $2\pi i$ 倍の値となる．$Q[N]$ は整数なので，k が整数ならば $\exp(-k\,\Gamma[M])$ は 3 次元空間への拡張の仕方に依存しない．したがって，作用

$$\mathcal{S} = k\,\mathcal{S}_{WZW} \tag{17.45}$$

（k は整数）をもちいて 2 次元空間 $\mathcal{M}^2$ 上の場の理論を構成することができる．理論を定義するには，$\exp(-\mathcal{S}) = \exp(-k\mathcal{S}_{WZW})$ をもちいて汎関数積

分を構成すればよいので，$\mathcal{M}^2$ それ自体における場の配位を特定するだけで，問題なく理論を定義できる．作用 (17.45) は WZW 理論を定義し，k はこの理論のレベル数と呼ばれる．ここまで，作用の係数の量子化を $\mathcal{M}^2 = S^2$ を使って議論してきたが，同様な議論と結果がより一般的に成り立つ．

最も単純な場合は $\mathcal{M}^2 = \mathbf{R}^2$ である．このとき，場 $M(x)$ に適切な境界条件を課すと，WZW 作用は複素座標をもちいて

$$\mathcal{S}_{WZW} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{M}^2} \mathrm{Tr}(\partial_z M \partial_{\bar{z}} M^{-1}) + \Gamma[M] \tag{17.46}$$

と表せる．上式の第 1 項で複素座標 $z = x_1 - ix_2$, $\bar{z} = x_1 + ix_2$ をもちいた．この作用は，次の非常に有用な恒等式に従う．

$$\mathcal{S}_{WZW}[M\,h] = \mathcal{S}_{WZW}[M] + \mathcal{S}_{WZW}[h] - \frac{1}{\pi}\int_{\mathcal{M}^2} \mathrm{Tr}(M^{-1}\partial_{\bar{z}} M\,\partial_z h\,h^{-1}). \tag{17.47}$$

これはポリヤコフ–ウィグマン (Polyakov–Wiegmann) 恒等式として知られている．上式は (17.43) から簡単に示すことができる．カイラルに分離している点，つまり M にかかる反正則微分と h にかかる正則微分しか現れない点に注意しよう．これは，運動方程式が

$$\partial_z(M^{-1}\partial_{\bar{z}} M) = M^{-1}\partial_{\bar{z}}(\partial_z M\,M^{-1})M = 0 \tag{17.48}$$

で与えられることを示す．

WZW 作用は，正則関数による M の微小な左移動 $M \to (1+\theta(z))M$ によって不変であり，また反正則関数による M の右移動 $M \to M(1+\chi(\bar{z}))$ によっても不変である．これは (17.47) を使えばすぐに確認できる．これらの変換に付随したカレントは

$$\begin{aligned} J_z &= -\frac{k}{\pi}\,\partial_z M\,M^{-1}, \\ J_{\bar{z}} &= \frac{k}{\pi}\,M^{-1}\partial_{\bar{z}} M \end{aligned} \tag{17.49}$$

である．（これらはレベル k の WZW 模型のカレントである．）運動方程式 (17.48) により，これらのカレントは

$$\partial_{\bar{z}} J_z = 0, \qquad \partial_z J_{\bar{z}} = 0 \tag{17.50}$$

に従うことがわかる．

ポリヤコフ–ウィグマンの関係式から，WZW 作用についての非常に有用な結果をさらに導くことができる．$M + \delta M = (1+\theta)M$ で与えられる場 M の小さな変分を考えよう．ただし，$\theta = \delta M\, M^{-1}$ は微小であるとする．ここで，ポリヤコフ–ウィグマンの関係式をもちいると

$$
\begin{aligned}
\delta \mathcal{S}_{WZW} &= -\frac{1}{\pi}\int \mathrm{Tr}\left(\partial_{\bar z}(\delta M M^{-1})\partial_z M M^{-1}\right) \\
&= -\frac{1}{\pi}\int \mathrm{Tr}(\delta M M^{-1}\partial_{\bar z} A_z) = -\frac{1}{\pi}\int \mathrm{Tr}(\delta M M^{-1} D_z \bar{\mathcal{A}}) \\
&= -\frac{1}{\pi}\int \mathrm{Tr}(\bar{\mathcal{A}}\delta A_z)
\end{aligned}
\tag{17.51}
$$

が得られる．ただし，$A_z = -\partial_z M M^{-1}$ である．また，D_z は随伴表現の共変微分 $D_z\bar{\mathcal{A}} = \partial_z\bar{\mathcal{A}} + [A_z, \bar{\mathcal{A}}]$ を表す．$\bar{\mathcal{A}}$ は

$$
\bar{\mathcal{A}} = -\partial_{\bar z} M\, M^{-1} \tag{17.52}
$$

で定義される．これは関係式

$$
\partial_{\bar z} A_z - \partial_z \bar{\mathcal{A}} + [\bar{\mathcal{A}}, A_z] = 0 \tag{17.53}
$$

をみたすことに注意しよう．

17.7　2 次元のディラック行列式

2 次元のディラック演算子の行列式は，2 次元フェルミオン場の汎関数積分から得られる．無質量フェルミオンの場合，この行列式は WZW 作用をもちいて正確に計算することができる．

2 次元のディラック行列は，σ_i $(i = 1, 2)$ ととることができる．というのも，これらは関係式 $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$ をみたすからである．2 次元の無質量フェルミオン場のうち $U(N)$ 群の既約表現 R に属し，$U(N)$ ゲージ場と結合するものを考えよう．(他の群についても同様に議論できる．) このフェルミオンのラグランジアンは

$$
\mathcal{L} = \bar\psi(D_1 + iD_2)\psi + \bar\chi(D_1 - iD_2)\chi \tag{17.54}
$$

と書ける．ここで，ψ, χ は 2 成分スピノールの 2 つのカイラル成分にとれる．

$D_i = \partial_i + A_i$ は共変微分である．ラグランジアンは $D_z = \frac{1}{2}(D_1 + iD_2)$ と $D_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(D_1 - iD_2)$ に自然に分離しているので，これらの複素成分をもちいるのが便利である．

ゲージ場のパラメータ表示

行列式 $\det D_z$ と $\det D_{\bar{z}}$ を最も効率よく計算するには，ゲージ場の複素成分 $A_z, A_{\bar{z}}$ を次のようにパラメータ表示をすればよい．

$$
\begin{aligned}
A_z &= -\partial_z M\, M^{-1}, \\
A_{\bar{z}} &= M^{\dagger -1} \partial_{\bar{z}} M^{\dagger}.
\end{aligned}
\tag{17.55}
$$

ここで，M は複素行列である．ゲージ群が $SU(N)$ のとき，これは単位行列式をもつ.（まずはこの場合について考えよう.）このパラメータ表示が可能であることは，次のようにわかる．∂_z は，境界条件を適切にとると，2 次元で可逆となる．なぜなら，リューヴィルの定理により特異点をもたない反正則関数は存在しないからである．この共変微分 $\partial_z + A_z$ に対応するゼロモードの数は，指数定理によって与えられ，$SU(N)$ ゲージ場のとき，これはゼロになる．特定の A_z に対してゼロモードのペアが現れるかもしれないが，A の微小変化のもとで，これらは一般にゼロでないモードとなる．したがって，一般的に $\partial_z + A_z$ を可逆にとることができ，このとき，与えられた A_z をもちいて新しいポテンシャル $\mathcal{A}_{\bar{z}}$ を次にように定義することができる．

$$
\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}} A_z - \partial_z \mathcal{A}_{\bar{z}} + [\mathcal{A}_{\bar{z}}, A_z] &= 0, \\
\mathcal{A}_{\bar{z}} &= (D_z^{-1})\, \partial_{\bar{z}} A_z.
\end{aligned}
\tag{17.56}
$$

このとき，パラメータ表示に必要な行列 M は

$$
M(x, 0, C) = P \exp\left(-\int_{0\ C}^{x} A_z dz + \mathcal{A}_{\bar{z}} d\bar{z} \right) \tag{17.57}
$$

として構成できる．式 (17.56) は M が原点から x までの経路 C に依存しないことを示している．これを見るために，より一般的にある経路 C に沿った平行移動の演算子を考えよう．ここで，C は単純に連結された 2 次元空間 $\mathcal{M}$ 上の原点から座標 x^i で指定された点までの経路で，平行移動演算子は

$$
\mathcal{P}(x, 0, C) = P \exp\left(-\int_{0\ C}^{x} A_i dx^i \right) \tag{17.58}
$$

で与えられる．一般的に $\mathcal{P}(x,0,C)$ は積分経路 C に依存する．例えば，もし C' が C からずれていて，C を経路に沿った点 y において面積要素 σ^{ij} 分だけ微小変形させた経路であるとすると，

$$\delta\mathcal{P}(x,0,C) = -P\exp\left(-\int_{yC}^{x} A_i dx^i\right)\frac{1}{2}F_{ij}\sigma^{ij}\,P\exp\left(-\int_{0\ C}^{y} A_i dx^i\right) \tag{17.59}$$

が得られる．経路依存性は場の強さ F_{ij} がゼロでないことによる．M の場合は，平坦性 (flatness) の条件 (17.56) が積分の経路非依存性を保証していることがわかる．(積分 (17.57) の始点は必ずしも原点にとる必要はなく，どこにとってもよい．) M の形から $A_z = -\partial_z M M^{-1}$ も確認できる．これは (17.55) の第 1 式と一致する．(17.55) の第 2 式はこのエルミート共役から得られる．

ゲージ群が $U(1)$ の場合は，A_i が勾配 (gradient) と回転 (curl) で表されるという基本的事実（つまり $A_i = \partial_i\theta + \epsilon_{ij}\partial_j\phi$）をもちいることができる．これより，$M = \exp(\phi + i\theta)$ としてパラメータ表示 (17.55) が得られる．したがって，(17.55) の結果は $U(N)$ 一般について成り立つ．

もし空間が単純連結でなければ，∂_z はゼロモードをもつことができる．つまり，ゲージ変換でゼロにならない平坦なポテンシャル a が一般に存在する．(a をゼロに変換させるようなゲージ変換は一価性をもたない．) さらに，閉じた経路には異なるタイプのもの，つまり可縮なものと可縮な閉経路に変形できないものが存在する．後者のタイプの経路では，平坦なポテンシャルの積分 $\mathcal{P}(0,0,C)$ は非可縮な閉曲線 C のまわりでの経路積分となり，その値は経路の微小変化のもとで不変である．これはゲージ場についてのトポロジカル不変量を与える．(これは C のまわりの場のホロノミー (holonomy) として知られている．) このとき，この自由度を含めることによって (17.55) を一般化することができる．例として，トーラス $S^1 \times S^1$ を考えよう．これは 2 つの実座標 ξ_1, ξ_2 $(0 \leq \xi_i \leq 1)$ で表される．ただし，ξ_1 は $\xi_1 = 0$ と $\xi_1 = 1$ が一致する周期性をもち，ξ_2 も同様の周期性をもつものとする．複素座標は $z = \xi_1 + \tau\xi_2$ ととれる．ここで $\tau = \mathrm{Re}\,\tau + i\,\mathrm{Im}\,\tau$ はトーラスのモジュラー・パラメータ (modular parameter) と呼ばれる複素数である．非可縮な閉曲線は α, β サイクルと呼ばれる 2 つの基本的なサイクルによって生成される．こ

れらのサイクルのまわりのホロノミーは，一定のゲージ場 a から生成できる．残りの A の自由度についても，上の議論が適用できるので，以上から

$$A_z = M\left[\frac{i\pi a}{\mathrm{Im}\,\tau}\right]M^{-1} - \partial_z M\,M^{-1} \tag{17.60}$$

と表すことができる．

パラメータ表示 (17.55) は一意ではない．M と $MV(\bar{z})$ は，$V(\bar{z})$ が純粋に反正則であるとき，同じポテンシャル A_z を導くことに注意しよう．球面上あるいは適切な境界条件を課した複素平面上では，特異点をもたない反正則関数はない（リューヴィルの定理）ので，一意性が保証される．ゲージ不変な M, $M^\dagger$ の関数は観測量とみなせる．∂_z がゼロモードをもつその他の空間において，(17.55) に類似したパラメータ表示をもちいる場合は，この一意性の問題によらない量だけが観測量となることを確認する必要がある．球面上であっても，電荷が存在する場合にはそのような一意性の問題は存在する．なぜなら，電荷のある位置に特異点が現れるかもしれないからである．物理量はポテンシャルで定義されるので，このような問題は回避されなければならない．

パラメータ表示 (17.55) あるいは (17.60) の 1 つの利点は，ゲージ変換に関するものである．$U(N)$ 群の要素 $g(x)$ によるゲージ変換のもとで，$M \to M^g = gM$ となる．これが変換則 $A \to A^g = gAg^{-1} - dg\,g^{-1}$ を導くことは簡単にわかる．M は複素行列なので，ゲージ変換によって M を恒等行列にすることはできない．M のユニタリー部分はゲージ選択によって除くことができるが，M のエルミート部分はゲージ不変である．すなわち，$M^\dagger M$ を 2 次元ゲージ場のゲージ不変量としてもちいることができる．

行列式の評価

ディラック行列式を評価するには，D_z と $D_{\bar{z}}$ のグリーン関数を正則化する必要がある．∂_z の逆演算子は，ユークリッド化されたカイラル・ディラック伝播関数であり，これは

$$G(x, x') = \frac{1}{\pi(\bar{x} - \bar{x}')} \tag{17.61}$$

で与えられる．共変微分 $D_z = \partial_z + A_z = \partial_z - \partial_z M M^{-1}$ の場合は，

$$D_z^{-1}(x,x') = \frac{M(x)M^{-1}(x')}{\pi(\bar{x}-\bar{x}')} \tag{17.62}$$

となる．この正則化を単純な点分離 (point-splitting) の手続きをもちいて定義すると，

$$D_z^{-1}(x,x')_{Reg} \equiv \mathcal{G}(x,x') = \int d^2y\ \frac{M(x)M^{-1}(y)}{\pi(\bar{x}-\bar{y})}\,\sigma(x',y;\epsilon),$$
$$\sigma(x',y;\epsilon) = \frac{1}{\pi\epsilon}\exp\left(-\frac{|x'-y|^2}{\epsilon}\right) \tag{17.63}$$

と書ける．ここで，ϵ は正則化パラメータである．$\epsilon \to 0$ の極限で $\sigma(x',y;\epsilon)$ は 2 次元 δ 関数となり，$D_z^{-1}(x,x')$ が得られることに注意しよう．したがって，$\mathcal{G}(x,x')$ は確かに $D_z^{-1}(x,x')$ の正則化された形であり，短距離での振る舞いが改善されている．

つぎに，$S_{eff} \equiv \log\det D_z = \mathrm{Tr}\log D_z$ を考えよう．最後に現れるトレースは，汎関数と行列についてのトレースである．この量の変分をとると，$\delta S_{eff} = \mathrm{Tr}(D_z^{-1}\delta D_z)$ となる．$\delta D_z = \delta A_z$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{\delta S_{eff}}{\delta A_z^a(x)} &= \mathrm{Tr}\left[D_z^{-1}(x,x')(-it^a)\right]_{x'\to x}\\ &= \mathrm{Tr}\left[\mathcal{G}(x,x)(-it^a)\right]_{\epsilon\to 0}\end{aligned} \tag{17.64}$$

となる．ただし，ここでのトレースは行列についてだけのトレースである．2 行目では，D_z^{-1} を $\mathcal{G}$ に置き換えて正則化された変分を表した．$x' = x$ のとき，$\sigma(x',y) = \sigma(x,y)$ は $x \approx y$ に鋭いピークをもつので，$\mathcal{G}(x,x)$ を次のように展開することができる．

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,x) = \int d^2y\ \frac{\sigma(x,y)}{\pi}&\left[\frac{1}{(\bar{x}-\bar{y})} - M\partial_z M^{-1}(x)\left(\frac{x-y}{\bar{x}-\bar{y}}\right)\right.\\ &\left.- M\partial_{\bar{z}}M^{-1} + \cdots\right].\end{aligned} \tag{17.65}$$

最初の 2 項は角度積分によりゼロとなる．3 項目からは有限量の寄与があり，それ以降の項は $\epsilon \to 0$ で消える．したがって，

$$\begin{aligned}\delta S_{eff} &= \int d^2x\ \mathrm{Tr}\left[\mathcal{G}(x,x)(-it^a)\right]_{\epsilon\to 0}\delta A_z^a(x)\\ &= \frac{1}{\pi}\int d^2x\ \mathrm{Tr}\left[\partial_{\bar{z}}MM^{-1}\delta A_z\right]\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int d^2x\ \mathrm{Tr}(\bar{\mathcal{A}}\delta A_z) \tag{17.66}$$

を得る．A_z と $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_{\bar{z}} = -\partial_{\bar{z}} MM^{-1}$ はリー代数の表現 R に属する行列である．よって，トレースをとるには公式 $\mathrm{Tr}(t^a t^b)_R = A_R \mathrm{Tr}(t^a t^b)_F$ をもちいればよい．ただし，F は基本表現を表し，A_R は表現 R の指数（インデックス）として知られる整数である．したがって，式 (17.66) は

$$\begin{aligned} \delta S_{eff} &= -\frac{A_R}{\pi}\int d^2x\ \mathrm{Tr}(\bar{\mathcal{A}}\delta A_z)_F \\ &= A_R\,\delta\mathcal{S}_{WZW}(M) \end{aligned} \tag{17.67}$$

と表せる．ただし，WZW 作用についての関係式 (17.51) をもちいた．これより，S_{eff} は WZW 作用の定数倍であることがわかる．$A=0$ のとき $\det D_z = \det\partial_z$ なので，これより比例定数を決めることができる．よって，カイラル・ディラック行列式は最終的に，

$$\det D_z = \det(\partial_z)\exp\bigl(A_R\,\mathcal{S}_{WZW}(M)\bigr) \tag{17.68}$$

となる．この部分はゲージ不変ではないことに注意しよう．実際，微小ゲージ変換のもとで

$$\delta S_{eff} = -\frac{1}{\pi}\int d^2x\ \mathrm{Tr}(\partial_{\bar{z}} A_z\,\delta g\,g^{-1}) \tag{17.69}$$

となることがわかる．このゲージ変換にはアノマリーがある．M は複素化されたゲージ群に属するので，ここでの行列式の導出はアノマリー $\partial_{\bar{z}} A/\pi$ の複素パラメータによる積分とみなすこともできる．

行列式 $D_{\bar{z}}$ についても，同様な結果が成り立つ．

$$\det D_{\bar{z}} = \det(\partial_{\bar{z}})\exp\bigl(A_R\,\mathcal{S}_{WZW}(M^\dagger)\bigr). \tag{17.70}$$

完全なディラック行列式 $\det(D_z D_{\bar{z}})$ を求めるには，$\det D_z$ と $\det D_{\bar{z}}$ の積をとればよい．これは

$$\det(D_z D_{\bar{z}}) = \det(\partial_z\partial_{\bar{z}})\exp\left[A_R\bigl(\mathcal{S}_{WZW}(M) + \mathcal{S}_{WZW}(M^\dagger)\bigr)\right] \tag{17.71}$$

となる．これはゲージ不変な形ではない．ゲージ不変な表現は

$$\det(D_z D_{\bar{z}}) = \det(\partial_z\partial_{\bar{z}})\exp\left[A_R\mathcal{S}_{WZW}(M^\dagger M)\right]$$

$$= \det(\partial_z \partial_{\bar{z}}) \exp\left[A_R \mathcal{S}_{WZW}(H)\right] \qquad (17.72)$$

で与えられる．$H = M^\dagger M$ はゲージ不変な量である．ポリヤコフ–ウィグマン恒等式をもちいて $\mathcal{S}_{WZW}(H)$ を展開すると，

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{WZW}(H) &= \mathcal{S}_{WZW}(M) + \mathcal{S}_{WZW}(M^\dagger) \\ &\qquad - \frac{1}{\pi}\int d^2x \ \mathrm{Tr}(M^{\dagger -1}\partial_{\bar{z}} M^\dagger \, \partial_z M \, M^{-1}) \\ &= \mathcal{S}_{WZW}(M) + \mathcal{S}_{WZW}(M^\dagger) + \frac{1}{\pi}\int d^2x \ \mathrm{Tr}(A_{\bar{z}} A_z) \end{aligned} \qquad (17.73)$$

となる．したがって，公式 (17.71) に局所カウンター項 $(1/\pi)\int \mathrm{Tr}(A_{\bar{z}}A_z)$ を加えたものとして公式 (17.72) を理解することができる．13 章と本章の始めに議論したように，理論には局所カウンター項を加える自由がある．つまり，これは異なる正則化を選ぶことに相当する．実際のところ，(17.72) の結果の導出ではゲージ不変な正則化がもちいられている．

アーベル群に対応する (17.72) の結果は，ゲージ不変性のためのカウンター項も含めて，シュウィンガーによって 1961 年に最初に得られた．アーベル群の場合，(17.72) は次のように変形できる．

$$\begin{aligned} \det(D_z D_{\bar{z}}) &= \det(\partial_z \partial_{\bar{z}}) \exp\left[-\frac{1}{4\pi}\int_{x,y} F_{\mu\nu}(x) G(x-y) F_{\mu\nu}(y)\right], \\ G(x-y) &= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2}\frac{1}{p^2}\ \exp[ip\cdot(x-y)]. \end{aligned} \qquad (17.74)$$

これは 2 次元電気力学におけるフェルミオン行列式であり，シュウィンガー模型として知られている．これより，フェルミオンの効果によって，ゲージ場にゲージ不変かつ非局所的な質量項が与えられることがわかる．

参考文献

1. 本章の内容については，次の教科書が有用である．A.P. Balachandran, *Classical Topology and Quantum States*, World Scientific Pub. Co. (1991); R.A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Clarendon Press (1996).

2. 汎関数ヤコビアンによる量子異常の解釈は K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42**, 1195 1979 による．

3. ヤコビアンをもちいた非アーベル型アノマリーの計算は A.P. Balachandran, G. Marmo, V.P. Nair and C.G. Trahern, Phys. Rev. **D25**, 2713 (1982) で与えられている.

4. 非アーベル型アノマリーと指数定理の一般的な関係については，B. Zumino, Les Houches Lectures, 1983, reprinted in S.B. Treiman *et al.*, *Current Algebra and Anomalies*, Princeton University Press (1986); R. Stora, Lectures at the Cargèse Summer Institute on Progress in Gauge Field Theory, 1983; B. Zumino, Y-S. Wu and A. Zee, Nucl. Phys. **B239**, 477 (1984) を参照されたい．また，この関係については，A. Niemi and G.W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **51**, 2077 (1983) も参考になる.

5. アノマリーの幾何学的な解釈については，次の文献で解析された．M. Atiyah and I.M. Singer, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **81**, 2597 (1984); O. Alvarez, I.M. Singer and B. Zumino, Commun. Math. Phys. **96**, 409 (1984); P. Nelson and L. Alvarez-Gaumé, Commun. Math. Phys. **99**, 103 (1985); L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, Ann. Phys. **161**, 423 (1985); Erratum *ibid.* **171**, 233 (1986).

6. $\Omega^{(5)}$ をもちいた WZ 作用とその解析は E. Witten, Nucl. Phys. **B223**, 422 (1983) で与えられた．この論文は，標準模型におけるフレーバーアノマリーの有効作用も与えている.（本章では，有効作用の最小ゲージ変換の形を与えた．ウィッテンの論文で与えられた有効作用には，ゲージ不変な項がさらに追加されている．この点については，O. Kaymakcalan, S. Rajeev and J. Schechter, Phys. Rev. **D30**, 594 (1984) も参照されたい.）

7. アノマリー一致の条件は G. 't Hooft, Cargèse Lectures, 1979, reprinted in G. 't Hooft, *Under the Spell of the Gauge Principle*, World Scientific Pub. Co. (1994) で与えられている．また，これに関しては，S. Coleman and B. Grossman, Nucl. Phys. **B203**, 205 (1982) も参照されたい.

8. 混合アノマリーおよび重力アノマリー一般については，L. Alvarez-Gaumé and E. Witten, Nucl. Phys. **B234**, 269 (1984) で計算された.

9. 大域アノマリーの発見は E. Witten, Phys. Lett. **B117**, 324 (1982) による．本章での議論は，S. Elitzur and V.P. Nair, Nucl. Phys. **B243**, 205 (1984) に基づいている.

10. WZW 作用は E. Witten, Commun. Math. Phys. **92**, 455 (1983) にもよる．また，関連論文として S.P. Novikov, Usp. Mat. Nauk. **37**, 3 (1982) がある.

11. ポリヤコフ–ウィグマン恒等式と行列式の計算は A.M. Polyakov and P.B. Wiegmann, Phys. Lett. **B141**, 223 (1984) で与えられた.

12. シュウィンガー模型は J. Schwinger, Phys. Rev. **128**, 2425 (1962) で導入された.

第 18 章

有限温度と有限密度

18.1　密度行列とアンサンブル平均

これまでの章では，真空状態を背景とする物理過程のうち関与する粒子数の少ないものをおもに取り扱った．しかしながら，例えば有限な温度と密度をもつ気体の中での粒子の伝播や散乱過程などのように，媒質中の物理過程を考えなければならない場合が数多く存在する．系が純粋状態であれば，以前と同様に散乱過程の遷移振幅は

$$\mathcal{A}(i \to f) = \langle f|\hat{S}|i\rangle \tag{18.1}$$

と書ける．ここで，$\hat{S}$ は散乱演算子である．行列要素を実際に計算するのは困難かもしれないが，とにかくこれを計算すればよい．しかし，有限な温度と密度をもつ系のように始状態が統計的にしか特定できない場合は，適当な確率で始状態の平均をとる必要がある．(この確率は統計的な集団（アンサンブル）において特定の状態を選択する確率であり，波動関数が観測量となる特定の固有状態に崩壊する量子確率ではない．) 量子力学における状態の選択は密度行列 ρ で与えられる．ここで，観測量 A の平均期待値

$$\langle A\rangle = \sum_{\alpha} c_\alpha \langle\alpha|A|\alpha\rangle \tag{18.2}$$

を考えよう．ただし，$|\alpha\rangle$ は完全系を成す状態を表し，c_α は状態 $|\alpha\rangle$ を統計的な集団に見出す確率を与える．c_α は確率なので $\sum_\alpha c_\alpha = 1$ となる．

$$\rho = \sum_{\alpha} c_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{18.3}$$

と定義すると，上の公式は

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}\,(\rho A) \tag{18.4}$$

と書ける．c_α の規格化は $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$ で表される．密度行列 ρ はこの 2 つの式によって定義されると考えられる．すなわち，$\mathrm{Tr}\,\rho = 1$ をみたす ρ は状態の選択を特定する演算子であり，これは (18.4) のような平均で与えられる．この ρ の定義は基底に依存しないことに注意しよう．純粋状態 $|\lambda\rangle$ を選ぶことは $c_\lambda = 1$, $c_\alpha = 0$ $(\alpha \neq \lambda)$ に対応する．この場合，$\rho^2 = \rho$ であり，純粋状態はこれで定義できる．一方，$\rho^2 \neq \rho$ であれば，状態は統計的に混合されていると考えられる．

シュレーディンガー方程式から，状態の発展は

$$i\frac{\partial \rho}{\partial t} = H\,\rho - \rho\,H \tag{18.5}$$

となることがわかる．密度行列 ρ は古典統計力学の相空間密度を量子論に対応させたものとみなせる．つまり，式 (18.5) は量子論におけるリューヴィル方程式である．

密度行列は特定の状態に対応する演算子である．量子系のヒルベルト空間は系のすべての状態を与えるが，特定の状態（あるいは特定の混合状態）にある系を議論するには，その状態を選択する演算子が必要となる．これが密度行列の役割である．密度行列はシュレーディンガー表示では時間発展するが，ハイゼンベルク表示では時間に依存しないという特徴をもつ．対象となる系が純粋状態 $|a\rangle$ であれば，$\rho_a = |a\rangle\langle a|$ である．このとき，系に状態 $|b\rangle$ を見出す確率は $|\langle a|b\rangle|^2 = \mathrm{Tr}(\rho_a \rho_b)$ で与えられる．時刻 t で $\rho_a(t)$ と記述される状態を始状態とすると，その時刻 t' での時間発展 $\rho_a(t')$ は (18.5) によって与えられる．この時間発展後の状態に状態 ρ_b を観測する確率は

$$\begin{aligned} P(a \to b, t, t') &= \mathrm{Tr}\big(\rho_a(t')\rho_b(t)\big) \\ &= \mathrm{Tr}\big(e^{-iH(t'-t)}\rho_a e^{iH(t'-t)}\rho_b\big) \end{aligned} \tag{18.6}$$

で与えられる．これは時刻 t の状態 $|a\rangle$ が時刻 t' に $|b\rangle$ へと時間発展する散乱確率であると解釈できる．$t \to -\infty$, $t' \to +\infty$ の極限をとると，これは S 行列要素の絶対値の 2 乗である．よって，これまでに行った計算の多くは密

度行列をもちいて言い換えることができる．

ρ の時間発展はユニタリー変換で与えられるので，運動方程式が (18.5) となる密度行列の作用を書くことができる．まず，時刻 $t=0$ で ρ_0 となる密度行列から始めよう．理論のヒルベルト空間に施される任意のユニタリー演算子を U とすると，密度行列の作用は

$$\mathcal{S}=\int dt\left[i\mathrm{Tr}\left(\rho_0 U^\dagger \frac{\partial}{\partial t}U\right)-\mathrm{Tr}(\rho_0 U^\dagger H U)\right] \tag{18.7}$$

で与えられる．系の力学的な情報はすべて U で与えられ，時刻 t での密度行列は $\rho=U\rho_0 U^\dagger$ となる．作用 (18.7) の変分は

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}&=\int dt\mathrm{Tr}\left[U\rho_0 U^\dagger i\frac{\partial\xi}{\partial t}+U\rho_0 U^\dagger \xi H-U\rho_0 U^\dagger H\xi\right]\\&=\int dt\mathrm{Tr}\left[\left(-i\frac{\partial\rho}{\partial t}+H\rho-\rho H\right)\xi\right]\end{aligned} \tag{18.8}$$

で与えられる．ただし，$\xi=\delta U\,U^\dagger$ である．また，上式で部分積分を行った．これより，U を変化させて作用 (18.7) の極小化を行うと (18.5) が得られることがわかる．ある状況においては，その運動領域で重要となる演算子の部分集合だけから U を構成することで，(18.7) をその量子論の有効作用として利用できる場合がある．

つぎに，熱力学的な平衡状態にある力学系を考えよう．平衡状態では ρ は時間によらないので，$[H,\rho]=0$ となる．このとき，ρ の一般解はハミルトニアンと可換な演算子の関数で与えられる．つまり，ρ は保存量の関数でなければならない．この関数の形は，保存量を順次足し上げてゆくと，次のように簡単に決めることができる．2 つの完全に独立な系 I と II を考えよう．この 2 つの系が合成されたヒルベルト空間は，それぞれのヒルベルト空間のテンソル積 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_I\otimes\mathcal{H}_{II}$ であり，ある特定の状態を見出す確率はそれぞれの空間での確率の積で与えられる．したがって，$\rho=\rho_I\cdot\rho_{II}$ となる．また，$\mathcal{O}$ を加算的 (additive) な保存量とすると，$\mathcal{O}=\mathcal{O}_I+\mathcal{O}_{II}$ となる．よって，ρ は加算的な保存量の指数関数として表され，一般解は次の形で書ける．

$$\rho=Z^{-1}\exp\left(-\sum_i \beta_i\mathcal{O}_i\right). \tag{18.9}$$

ここで，$\mathcal{O}_i$ は，エネルギー，運動量，角運動量，電荷などといった加算的に

保存される演算子を表す．ρ の規格化には $Z = \mathrm{Tr}\exp\left(-\sum_i \beta_i \mathcal{O}_i\right)$ が必要である．これは，分配関数である．ここで，β_i は定数であり，対象となる系の保存量の平均値から特定される．ρ は H と可換なので，これを対角化することもできる．よって，式 (18.9) は

$$\rho = V \rho_{diag} V^\dagger \tag{18.10}$$

と書ける．ここで，V は H と可換なユニタリー変換であり，例えば，空間回転や電荷についての位相変換などである．変換 V および ρ_{diag} のパラメータで (18.9) の β_i は定義されるので，これらのパラメータから保存量の平均値が得られる．非相対論では，粒子数が保存量となるので，よく知られている化学ポテンシャルの項 $\beta\mu N$ が (18.9) の括弧のなかに現れる．相対論の場合は，粒子の生成・消滅が可能なので，電荷の保存則だけが必要である．

局所的に平衡状態にある流体を考えると，(18.10) の形を流体の微小要素に適用することができる．このとき，ユニタリー変換のパラメータは流体の各要素でほぼ一定とみなせるが，より大きな領域ではこのパラメータは変数となる．作用 (18.7) をこれらの局所パラメータに対応するモードに制限することにより，この力学を近似的に記述することができる．これは，流体力学的な記述を与える手法の 1 つである．

18.2　スカラー場の理論

これまでの結果を実スカラー場の理論に適用してみよう．この理論の場合，保存量はエネルギー，運動量，角運動量だけで与えられる．よって，平衡状態 ρ はこれらの量の関数である．ある特定のローレンツ座標の静止系を選び，さらに，角運動量の向きを例えば 3 つ目の座標軸の方向にとることによって，この理論の座標系を選ぶことができる．一般的な場合を得るには，（空間回転を含む）一般のローレンツ変換をこの座標系に施せばよい．よって，ρ の形は

$$\rho = V \exp(-\beta_0 H - l_3 M_{12})\, V^\dagger \tag{18.11}$$

となる．ここで，$M_{12} = J_3$ は角運動量の第 3 成分である．V は一般のローレンツ変換に対応するユニタリー変換を表す．β_0 と l_3 は実数である．演算子

の変換則から

$$\rho = \exp\left(-\beta_0 L_0^\mu P_\mu - l_3 L_1^\mu L_2^\nu M_{\mu\nu}\right) \tag{18.12}$$

と表せる．ここで，$P_\mu = (H, P_i)$ は全エネルギーと運動量の演算子であり，$M_{\mu\nu}$ は回転を含むローレンツ変換の生成子である．L_α^μ はベクトルに対するローレンツ変換の変換行列である．よって，L_α^μ の成分はユニタリー変換 V のパラメータから得られる．L_0^μ は運動する媒質の 4 次元速度とみなすことができる．また，$\frac{1}{2} l_3 (L_1^\mu L_2^\nu - L_1^\nu L_2^\mu)$ は媒質の角運動量に関係している．これは，L_α^μ のローレンツ・ブースト変換に対応するパラメータが速度を与え，L_α^μ の回転に対応するパラメータが角運動量を与えることからわかる．エネルギー期待値の平均を計算することにより，媒質の静止系で β_0 を温度の逆数 $\beta_0 = T_0^{-1}$ とみなすことができる．

角運動量がゼロの場合，静止系において分配関数は $Z = \mathrm{Tr}\exp(-\beta_0 H) = \mathrm{Tr}\exp(-\beta H)$ で与えられる．ここからは簡単のため β の添え字を省略しよう．以下では，すべての物理量は媒質の静止系で与えられているものとする．自由場の分配関数は次のように評価することができる．

$$\begin{aligned}
Z &= \mathrm{Tr}\exp(-\beta \sum_{\boldsymbol{k}} \omega_k a_k^\dagger a_k) \\
&= \prod_{\boldsymbol{k}} \mathrm{Tr}_k \exp(-\beta\omega_k a_k^\dagger a_k) \\
&= \prod_{\boldsymbol{k}} \left(1 + e^{-\beta\omega_k} + e^{-2\beta\omega_k} + \cdots\right) \\
&= \prod_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_k}}.
\end{aligned} \tag{18.13}$$

ここで，Tr_k は運動量 $\boldsymbol{k}$ が固定された状態についての和を表す．H は $a_k^\dagger a_k$ と交換するので，$\mathrm{Tr}\, a_k^\dagger a_p^\dagger \rho = \mathrm{Tr}\, a_k a_p \rho = 0$ となるのは明らかである．さらに，$\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{p}$ のとき $\mathrm{Tr}\, a_k^\dagger a_p \rho = 0$ となる．被占数 (occupation number) の平均 n_k は

$$\begin{aligned}
n_k = \langle a_k^\dagger a_k \rangle &= -\frac{\partial}{\partial \beta\omega_k} \log Z \\
&= \frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1}
\end{aligned} \tag{18.14}$$

となる．ハミルトニアンの平均値は

$$\langle H\rangle = \mathrm{Tr}\left(\rho\sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k\right) = V\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{\omega_k}{e^{\beta\omega_k}-1} \tag{18.15}$$

で与えられる．ただし，最後の等式で体積が無限となる極限をとった．スカラー場はボソンを記述するので，予想どおりこれは標準的なボース–アインシュタインの表式を与える．

自由スカラー場の伝播関数は，$\langle a_k^\dagger a_l\rangle = n_k\delta_{kl}$ と $\langle a_k^\dagger a_l^\dagger\rangle = \langle a_k a_l\rangle = 0$ をもちいて次のように評価できる．

$$\begin{aligned}
G(x,y) &\equiv \mathrm{Tr}\left[\rho T\,\phi(x)\phi(y)\right]\\
&= \theta(x^0-y^0)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[(1+n_k)e^{-ik(x-y)}+n_k e^{ik(x-y)}\right]\\
&\quad + \theta(y^0-x^0)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[n_k e^{-ik(x-y)}+(1+n_k)e^{ik(x-y)}\right]\\
&= \theta(x^0-y^0)\sum_k\frac{e^{-ik(x-y)}}{2\omega_k V}+\theta(y^0-x^0)\sum_k\frac{e^{ik(x-y)}}{2\omega_k V}\\
&\qquad + \sum_k\frac{n_k}{2\omega_k V}\left(e^{-ik(x-y)}+e^{ik(x-y)}\right)\\
&= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}+n_k\,2\pi\,\delta(k^2-m^2)\right]e^{-ik(x-y)}.
\end{aligned} \tag{18.16}$$

温度がゼロの場合の通常の寄与に加えて，被占数に比例した項が現れる．伝播関数は粒子が系の時空間上の点 y に置かれたときに点 x で粒子を検出する確率振幅を与える．第 1 項は粒子が x から y へ伝播する確率を表す.（有限温度のために存在する）背景分布から粒子が検出される確率も存在し，これは第 2 項で与えられる．

温度に依存する伝播関数は，散乱過程に関する計算やパラメータの補正などにもちいられる．例えば，すでに見たように $\lambda\phi^4$ 理論の質量補正は $12\lambda G(x,x)$ で与えられた．(18.16) の伝播関数をもちいると，温度に依存する部分は

$$\delta m^2 = 12\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \frac{2}{e^{\beta\omega_k} - 1}$$
$$= \lambda T^2 \mathcal{I}(\alpha) \tag{18.17}$$

と評価できる．ただし，$\alpha = m/T$ であり，

$$\mathcal{I}(\alpha) = \frac{3}{2\pi^3} \int d^3u \frac{1}{\sqrt{u^2+\alpha^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{u^2+\alpha^2}} - 1} \tag{18.18}$$

である．粒子が媒質のなかを伝播する際，この粒子は粒子の背景分布と相互作用しうる．そのため，粒子の有効質量は増加することになる．上の結果は，高温極限では $\mathcal{I}(\alpha) \approx \mathcal{I}(0) = 1$, $\delta m^2 = \lambda T^2$ となる．

18.3 有限温度・密度におけるフェルミ粒子

フェルミ粒子の生成・消滅演算子は反交換関係に従う．ここでは相対論的なフェルミ粒子を考え，粒子の生成・消滅演算子を $a^\dagger_{k,r}$, $a_{k,r}$，反粒子の生成・消滅演算子を $b^\dagger_{k,r}$, $b_{k,r}$ で表そう．一般に，フェルミ粒子数の保存則も成り立つ．ただし，この値は荷電粒子の総電荷に比例する．自由フェルミ粒子の場合，$H = \sum_{k,r}(E_k a^\dagger_{k,r} a_{k,r} + E_k b^\dagger_{k,r} b_{k,r})$ と書ける．また，保存量となるフェルミ粒子数は $N = \sum_{k,r}(a^\dagger_{k,r} a_{k,r} - b^\dagger_{k,r} b_{k,r})$ と書ける．このとき，分配関数は

$$Z = \mathrm{Tr}\exp\left[-\beta(H - \mu N)\right]$$
$$= \mathrm{Tr}\exp\left[-\beta\sum_{k,r}(E_k - \mu)a^\dagger_{k,r}a_{k,r} - \beta\sum_{k,r}(E_k + \mu)b^\dagger_{k,r}b_{k,r}\right]$$
$$= \prod_{k,r}\mathrm{Tr}_{k,r}\exp\left[-\beta(E_k - \mu)a^\dagger_{k,r}a_{k,r}\right]\prod_{p,r}\mathrm{Tr}_{p,s}\exp\left[-\beta(E_p + \mu)b^\dagger_{p,s}b_{p,s}\right]$$
$$= \prod_{k,r}\left(1 + e^{-\beta(E_k - \mu)}\right)\prod_{p,s}\left(1 + e^{-\beta(E_p + \mu)}\right) \tag{18.19}$$

となる．$\mathrm{Tr}_{k,r}$ は運動量 k とスピン r が固定された被占数についてのトレースを表す．被占数の平均は

$$
\begin{aligned}
n_k\,\delta_{r,s} &= \langle a^\dagger_{k,r} a_{k,s}\rangle = \delta_{r,s}\,\frac{1}{e^{\beta(E_k-\mu)}+1},\\
\bar{n}_k\,\delta_{r,s} &= \langle b^\dagger_{k,r} b_{k,s}\rangle = \delta_{r,s}\,\frac{1}{e^{\beta(E_k+\mu)}+1}
\end{aligned}
\tag{18.20}
$$

で与えられる．フェルミ粒子であるので，予想どおりこれはフェルミ–ディラック分布を与える．μ が正のとき，粒子の総数が反粒子の総数よりも多くなる．ハミルトニアンの平均値は

$$
\begin{aligned}
\langle H\rangle &= \mathrm{Tr}\,(\rho\, H)\\
&= \sum_r V\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,E_k\,(n_k+\bar{n}_k)
\end{aligned}
\tag{18.21}
$$

となる．ディラック粒子の伝播関数は

$$
\begin{aligned}
S(x,y) &= \mathrm{Tr}\left[\rho\, T\psi(x)\bar{\psi}(y)\right]\\
&= \left[\theta(x^0-y^0)S_> - \theta(y^0-x^0)S_<\right]
\end{aligned}
\tag{18.22}
$$

と計算できる．ただし，

$$
\begin{aligned}
S_> &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\Big[(1-n_p)(\gamma\cdot p+m)e^{-ip(x-y)}\\
&\qquad\qquad + \bar{n}_p(\gamma\cdot p-m)e^{ip(x-y)}\Big],\\
S_< &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\Big[n_p(\gamma\cdot p+m)e^{-ip(x-y)}\\
&\qquad\qquad + (1-\bar{n}_p)(\gamma\cdot p-m)e^{ip(x-y)}\Big]
\end{aligned}
\tag{18.23}
$$

である．これらの式はまとめて，

$$
\begin{aligned}
S(x,y) &= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\gamma\cdot p+m}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip(x-y)}\\
&\quad + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\Big[-n_p(\gamma\cdot p+m)e^{-ip(x-y)}\\
&\qquad\qquad + \bar{n}_p(\gamma\cdot p-m)e^{ip(x-y)}\Big]
\end{aligned}
\tag{18.24}
$$

と表せる．これより，この伝播関数も温度がゼロの通常の部分と分布関数に依存する部分に分離されることがわかる．

18.4 熱平均についての条件式

ハミルトニアンは時間発展の演算子なので，$e^{-\beta H}$ によって演算子の時間変数が $-i\beta$ の虚数分だけずれると解釈できる．この解釈をもちいると，計算が簡単になる場合がある．また，これは汎関数表示された分配関数を考える際にも有用である．具体的な公式として，2 つの演算子 $A(x)$, $B(y)$ の積の平均 $\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}A(x)B(y))$ を考えよう．トレースの巡回不変性から，$B(y)$ をトレースのなかの左端に移動させ，

$$\begin{aligned}\langle A(x)B(y)\rangle &= \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}A(x)B(y))\\ &= \mathrm{Tr}(B(y)e^{-\beta H}A(x))\end{aligned} \tag{18.25}$$

と書くことができる．H の時間発展性により，$B(y)e^{-\beta H} = e^{-\beta H}B(y^0 - i\beta, \boldsymbol{y})$ となる．あるいは，$B(y)$ を時間でフーリエ変換して，

$$B(y) = \int d\omega\ B(\omega, \boldsymbol{y})\, e^{-i\omega y^0} \tag{18.26}$$

と書くと，ハイゼンベルクの運動方程式は

$$[B(\omega, \boldsymbol{y}), H] = \omega\, B(\omega, \boldsymbol{y}) \tag{18.27}$$

となるので，この結果をもちいて，

$$\begin{aligned}B(y)e^{-\beta H} &= \int d\omega\ e^{-\beta H}\left[e^{\beta H}B(\omega, \boldsymbol{y})e^{-\beta H}\right]\ e^{-i\omega y^0}\\ &= \int d\omega\ e^{-\beta H}\, B(\omega, \boldsymbol{y})\, e^{-\beta\omega}e^{-i\omega y^0}\\ &= e^{-\beta H}\int d\omega\ B(\omega, \boldsymbol{y})\, e^{-i\omega(y^0 - i\beta)}\\ &= e^{-\beta H}B(y^0 - i\beta, \boldsymbol{y})\end{aligned} \tag{18.28}$$

と書ける．最後に，この条件を (18.25) にもちいると，

$$\langle A(x)\, B(y)\rangle = \langle B(y^0 - i\beta, \boldsymbol{y})\, A(x)\rangle \tag{18.29}$$

を得る．これは熱平均についての結果であり，久保–マーティン–シュウィンガー (Kubo–Martin–Schwinger) 条件として知られている．

18.5　熱源からの輻射

つぎに，本章で導入した概念のもう 1 つの応用として，熱された物体からの輻射（放射）を考えよう．熱源は電流やその他のエネルギー供給手段によって一定の温度に保たれている．この熱源はまた，恒星のようにそれ自身でエネルギーを生成できるものとする．この物体は真空中で熱輻射している．輻射熱は解放され，よって，熱源はその周囲と熱平衡状態にない．以下では，この熱輻射のスペクトルを求めよう．(もし熱源が輻射熱と平衡状態にあると仮定できれば，よく知られた議論から，プランク的なスペクトルが得られる．しかし，例えば宇宙空間に熱を放射する恒星のように，そのような仮定はほとんどの場合に明らかに成り立たない．そのような仮定を一切せずに，このスペクトル問題を扱うことがここでの目的である.）

作用の相互作用項の一般形は

$$\mathcal{S}_{int} = \int d^4x \; eA_\mu J^\mu \tag{18.30}$$

である．ある量子的な始状態 $|i\rangle$ から終状態 $|f\rangle$ への遷移を考えよう．4 元運動量 k と偏極 $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$ をもつ光子が放射される遷移振幅は

$$\mathcal{A} = -ie \int d^4x \; \frac{\epsilon_\mu^{(\lambda)}}{\sqrt{2\omega_k V}} \langle f|J^\mu(x)\, e^{ikx}|i\rangle \tag{18.31}$$

で与えられる．これを 2 乗し，終状態についての和をとるのであるが，ここで，終状態は光子と熱源の状態に対応する．光子の偏極についての和を

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)}\epsilon_\nu^{(\lambda)} \; = \; P_{\mu\nu} \tag{18.32}$$

と書くと，$\epsilon_0^{(\lambda)} = 0$ なので $P_{00} = P_{0i} = 0$ である．また，

$$P_{ij} \; = \; \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}} \tag{18.33}$$

が得られる．したがって，始状態 $|i\rangle$ からの遷移確率は

$$\sum_f |\mathcal{A}|^2 \; = \; e^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\int d^4x d^4y \; e^{-ik(x-y)} P_{\mu\nu} \, \langle i|J^\mu(x) J^\nu(y)|i\rangle \tag{18.34}$$

となる．ただし，熱源の終状態についての完全性の関係をもちいた．

始状態は統計的にしか特定できないので，上の結果は因子 $\rho = e^{-\beta H}$ をもちいてすべての始状態について平均化されなければならない．(この因子は熱源が温度 β^{-1} に保たれていることに対応している．) これより，

$$\langle \sum_f |\mathcal{A}|^2 \rangle = e^2 \int d^4x d^4y \, \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \, e^{-ik(x-y)} P_{\mu\nu} \, \langle J^\mu(x) J^\nu(y) \rangle \quad (18.35)$$

となる．ここで，$\rho^{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を

$$\langle J^\mu(x) J^\nu(y) \rangle = \int d\omega \; e^{i\omega(x^0 - y^0)} \, \rho^{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad (18.36)$$

で定義すると，

$$\begin{aligned} \langle J^\nu(y) J^\mu(x) \rangle &= \int d\omega \; e^{i\omega(y^0 - x^0)} \, \rho^{\nu\mu}(\omega, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \\ &= \int d\omega \; e^{i\omega(x^0 - y^0)} \, \rho^{\nu\mu}(-\omega, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \end{aligned} \quad (18.37)$$

を得る．式 (18.29) をこの平均値に適用すると，

$$\rho^{\nu\mu}(-\omega, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = e^{\beta\omega} \, \rho^{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad (18.38)$$

となる．つぎに，

$$A^{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho^{\nu\mu}(-\omega, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - \rho^{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad (18.39)$$

を定義すると，(18.38) を $A^{\mu\nu}$ で解くことができ，

$$\rho^{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{A^{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{e^{\beta\omega} - 1} \quad (18.40)$$

を得る．運動量が $\boldsymbol{k}$ のまわりの微小領域にある光子の放射率は，上式を (18.35) に代入し，総時間 $\int dx^0$ で割ると得られる．その結果は

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{\langle \sum_f |\mathcal{A}|^2 \rangle}{\int dx^0} \\ &= \frac{\pi e^2}{2\omega_k} \int d^3x d^3y \; e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \, P_{\mu\nu} \, A^{\mu\nu}(\omega_k, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, dN_{Planck}, \\ dN_{Planck} &= \frac{2}{e^{\beta\omega_k} - 1} \, \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \end{aligned} \quad (18.41)$$

となる．ここで，dN_{Planck} はプランクの分布関数である．$A^{\mu\nu}(\omega_k, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の形は熱源の性質に依存する．これは，上の公式にあるように光子のエネルギー ω_k で評価される量である．もし熱源が非常に多くのエネルギー準位をもち，ω のとりうる値が均等に確からしいとすると，放射光子は純粋なプランク分布を与える．そうでなければ，放射率は熱源の特性に最大限依存することになる．

$A^{\mu\nu}$ をカレントの交換子で表すこともできる．(18.36) と (18.37) から，

$$\langle\, [J^\mu(x), J^\nu(y)]\,\rangle = -\int d\omega\; e^{i\omega(x^0-y^0)}\, A^{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{18.42}$$

となることがわかる．カレントの遅延 2 点関数は

$$\Pi_R^{\mu\nu}(x,y) = -i\theta(x^0-y^0)\langle\, [J^\mu(x), J^\nu(y)]\,\rangle \tag{18.43}$$

と定義される．時間についてのフーリエ変換をもちいると，これは

$$\begin{aligned} \Pi_R^{\mu\nu}(x,y) &= \int d\omega'\; e^{i\omega'(x^0-y^0)}\, \Pi_R^{\mu\nu}(\omega', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \\ \Pi_R^{\mu\nu}(\omega', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \frac{A^{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\omega' - \omega - i\epsilon} \end{aligned} \tag{18.44}$$

と表せる．ただし，次の結果

$$i\, e^{i\omega(x^0-y^0)}\, \theta(x^0-y^0) = \int \frac{d\omega'}{2\pi}\, \frac{e^{i\omega'(x^0-y^0)}}{\omega' - \omega - i\epsilon} \tag{18.45}$$

をもちいた．式 (18.44) から

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} P_{\mu\nu} \Pi_R^{\mu\nu}(\omega', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} &\left[\int_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} P_{\mu\nu} A^{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right] \\ &\times \frac{1}{\omega' - \omega - i\epsilon} \end{aligned} \tag{18.46}$$

が導かれる．これを (18.41) と比較すると，$d\Gamma$ と dN_{Planck} は実数であるので，上式の大括弧のなかの量は実数であることがわかる．よって，この式の虚数部分をとると

$$\mathrm{Im}\left[\int_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} P_{\mu\nu} \Pi_R^{\mu\nu}(\omega', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right] = \frac{1}{2} \int_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} P_{\mu\nu} A^{\mu\nu}(\omega', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{18.47}$$

となる．ただし，よく知られている公式

$$\frac{1}{\omega' - \omega - i\epsilon} = P\frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi\delta(\omega' - \omega) \tag{18.48}$$

をもちいた．(18.47) を使うと，放射率を最終的に次のように表すことができる．

$$d\Gamma = \frac{\pi e^2}{\omega_k} \operatorname{Im} \Pi_R^{\mu\nu}(\omega_k, \boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k})\, P_{\mu\nu}\ dN_{Planck}. \tag{18.49}$$

ただし，

$$\Pi_R^{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}) = \int d^3x d^3y\ e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\ \Pi_R^{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{18.50}$$

である．これは，$\operatorname{Im} \Pi_R^{\mu\nu}(\omega_k, \boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k})$ が輻射に現れる熱源の物質的な特性をすべてとらえていることを示している．互いに近接しかつ放射強度がほぼ一定なエネルギー準位が数多くある系では，$(1/\omega_k)\operatorname{Im} \Pi_R^{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k})$ は定数に近似できるので，このとき上式は通常の黒体放射の公式と同じになる．

18.6　ゲージ場の遮蔽 —— アーベル型の場合

正負の電荷のあるプラズマでは，試験電荷のまわりに電荷符号が反対の粒子が集まるために静電ポテンシャルが遮蔽される．これはデバイ遮蔽効果である．似たような現象が粒子の密度が有限である場合にも起こる．この遮蔽効果はゲージ場（いまの場合は電磁場）の有効質量によって記述される．ゲージ場に質量がないことの議論においては，通常，ゲージ不変性とローレンツ不変性が要請される．有限な温度と密度をもつ系では，特定のフレームつまり温度が $T = \beta^{-1}$ となるフレームが好まれる．このフレームはプラズマの静止系を与える．この場合，偏極テンソルにローレンツ共変性を課すことができない．よって，ゲージ不変性のみが適用される．このゲージ不変性により，ある（局所的でない）質量項が許される．そのような項は，光子の場と媒質の荷電粒子との相互作用によって生成される．その効果は，光子の偏極（ただし，真空偏極ではなく媒質の背景場における偏極）を媒質に対応した伝播関数をもちいて計算することで求められる．（式 (18.12) の下で述べたように，プラズマの全体的な運動を考えると，ローレンツ不変性は保存されなけ

ればならない.)

この遮蔽効果の一例として，質量がゼロのフェルミオンが光子と結合する簡単な場合を考えよう．誘導質量項は光子の場について双線形であるので，関連する量は有効作用 Γ に現れる 2 光子の項であり，これは

$$\Gamma^{(2)} = -\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\ \mathrm{Tr}\big[\gamma\cdot A(x)S(x,y)\gamma\cdot A(y)S(y,x)\big] \tag{18.51}$$

で与えられる.（ここでは結合定数を明示していない．これは最後に $A_\mu \to eA_\mu$ とスケール変換すると再現することができる.）あからさまなローレンツ不変性がないので，これをローレンツ不変な形に変形する利点は特にない．そこで，まず時間積分から実行しよう．式 (18.22) をもちいて，時間積分を行うと，

$$\begin{aligned}\Gamma^{(2)} = \frac{1}{2}\int d\mu(k)\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\frac{1}{2E_q}&\\ \Big[T(p,q)\big(\frac{\alpha_p\beta_q}{E_p-E_q-k^0-i\epsilon} - \frac{\alpha_q\beta_p}{E_p-E_q-k^0+i\epsilon}\big)&\\ +T(p,q')\big(\frac{\alpha_p\bar\alpha_q}{E_p+E_q-k^0-i\epsilon} - \frac{\beta_p\bar\beta_q}{E_p+E_q-k^0+i\epsilon}\big)&\\ +T(p',q)\big(\frac{\bar\alpha_p\alpha_q}{E_p+E_q+k^0-i\epsilon} - \frac{\bar\beta_p\beta_q}{E_p+E_q+k^0+i\epsilon}\big)&\\ +T(p',q')\big(\frac{\bar\alpha_p\bar\beta_q}{E_p-E_q+k^0-i\epsilon} - \frac{\bar\beta_p\bar\alpha_q}{E_p-E_q+k^0+i\epsilon}\big)\Big]&\end{aligned} \tag{18.52}$$

を得る．ただし，$\alpha_p = 1-n_p$, $\beta_p = n_p$ および

$$\begin{aligned}A_\mu(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ikx}A_\mu(k),\\ d\mu(k) &= (2\pi)^4\delta^{(4)}(k+k')\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4k'}{(2\pi)^4},\\ T(p,q) &= \mathrm{Tr}\big[\gamma\cdot A(k)\ \gamma\cdot p\ \gamma\cdot A(k')\ \gamma\cdot q\big]\end{aligned} \tag{18.53}$$

である．式 (18.52) では $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}$ とした．また，$p'=(p^0,-\boldsymbol{p})$, $q'=(q^0,-\boldsymbol{q})$ および $p_0=E_p=|\boldsymbol{p}|$, $q_0=E_q=|\boldsymbol{q}|$ とおいた．n_p は

$$n_p = \frac{1}{e^{p_0/T}+1} = \frac{1}{e^{|\boldsymbol{p}|/T}+1} \tag{18.54}$$

で与えられる．ここで行った変形の一例として，(18.51) の項を $x^0 > y^0$ の場合，つまり $S_>(x,y)$ と $S_<(y,x)$ が現れる場合を見てみよう．(18.22) をもちいると，多くの項が得られるが，その 1 つに

$$\Gamma_1 = \frac{i}{2}\int_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\int_{-\infty}^{\infty} dx^0 \int_{-\infty}^{x^0} dy^0\ \mathrm{Tr}[\gamma\cdot A(k)\ \gamma\cdot p\ \gamma\cdot A(k')\ \gamma\cdot q] \\ \times \alpha_p\bar{\alpha}_p\, e^{i(k-p-q)x} e^{i(k'+p+q)y} \tag{18.55}$$

という項が現れる．収束因子 $e^{\epsilon y^0}$ を使って y^0 積分を行うと因子 $-i(k'^0+p^0+q^0-i\epsilon)^{-1}$ が導かれる．さらに積分を行うと，エネルギー運動量の δ 関数が与えられる．この δ 関数の 1 つは $k'^0 = -k^0$ を意味する．これより，(18.52) の $\alpha_p\bar{\alpha}_p$ 項の分母が得られる．また，もう一方の δ 関数は $\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}$ を意味する．よって，$\boldsymbol{q} \to -\boldsymbol{q}$ と変換することができ，$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}$ と書ける．これは $T(p,q')$ の係数を与える．ただし，$q' = (q^0, -\boldsymbol{q}) = (E_q, -\boldsymbol{q})$ である．その他の項も同様に変形することができる．すなわち，すべての項で $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}$ となる形にすると，q' や p' で書ける項が現れる．

収束因子 $e^{\pm\epsilon(x^0-y^0)}$ は時間積分を適切に行うために導入された．これらは $i\epsilon$ 因子として分母に現れている．この因子は，この段階でゼロとできる．上の計算でこれらは虚部に寄与する．ここでは，2 点関数の実部で記述される遮蔽効果に興味があるので，これらは必要でない．また，関連する虚部は，ほとんどの物理的な状況において，遅延関数の虚部であり，これは上の時間順序関数 (18.52) で直接与えられない．虚部の正しい形は，実部から得られる．それには，外部光子の運動量 k を $k_0 \to k_0 + i\epsilon$ として処方すればよい．

$\Gamma^{(2)}$ のうち媒質に依存した部分の実部は

$$\Gamma^{(2)} = \frac{1}{2}\int d\mu(k)\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\frac{1}{2E_q}\left[(n_q - n_p)\frac{T(p,q)}{E_p - E_q - k^0}\right. \\ - (n_p + \bar{n}_q)\frac{T(p,q')}{E_p + E_q - k^0} - (\bar{n}_p + n_q)\frac{T(p',q)}{E_p + E_q + k^0} \\ \left. + (\bar{n}_q - \bar{n}_p)\frac{T(p',q')}{E_p - E_q + k^0}\right] \tag{18.56}$$

で与えられる．

遮蔽効果は場の長距離的な振る舞いに関するものである．つまり，質量項は

k の値が小さいときに重要である．真空でない状態からの寄与として，(18.52) に現れるループ運動量 $\boldsymbol{q}$ の期待値は温度 T か化学ポテンシャル μ のどちらか大きいほうによって与えられる．したがって，$|\boldsymbol{p}|, |\boldsymbol{q}| \gg |\boldsymbol{k}|$ として遮蔽質量項を取り出すことができる．よって，$E_p - E_q - k^0 \approx -k\cdot Q$, $E_p - E_q + k^0 \approx k\cdot Q'$, $E_p + E_q \pm k^0 \approx 2E_q$ とおける．ただし $Q = (1, \boldsymbol{q}/E_q)$, $Q' = (1, -\boldsymbol{q}/E_q)$ である．（Q と Q' は，光的な (lightlike) ベクトル $Q^2 = Q'^2 = 0$ であることに注意しよう．）さらに，

$$
\begin{aligned}
T(p,q) &\simeq 8E_q^2 A_1 \cdot Q\, A_2 \cdot Q, \\
T(p',q') &\simeq 8E_q^2 A_1 \cdot Q'\, A_2 \cdot Q', \\
T(p',q) \simeq T(p,q') &\simeq 4E_q^2 \left(A_1 \cdot Q' A_2 \cdot Q + A_1 \cdot Q A_2 \cdot Q' - 2A_1 \cdot A_2\right)
\end{aligned}
\tag{18.57}
$$

である．ただし，$A_1 = A(k)$, $A_2 = A(k')$ とした．

分布関数の差も $n_p - n_q \simeq (dn/dq^0)\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{k}$ と近似できる．また，Q あるいは Q' の任意の関数 f について，次の結果

$$
\int d^3q \frac{dn}{dq^0} f(Q) = -\int d^3q \frac{2n}{q^0} f(Q) \tag{18.58}
$$

をもちいることができる．（以下では，f として $T(p,q)$ の $T(p',q')$ の項を考える．）さらに，$2\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{k} = k\cdot Q' - k\cdot Q$ をもちいることができる．(18.57) と (18.58) をもちいると，式 (18.56) は

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(2)} = \frac{1}{2}\int d\mu(k) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Bigg[&\frac{n+\bar{n}}{E_q}\Big(2A_1\cdot QA_2\cdot Q - A_1\cdot QA_2\cdot Q' \\
&- A_1\cdot Q'A_2\cdot Q + 2A_1\cdot A_2\Big) - \frac{n}{E_q} 2A_1\cdot QA_2\cdot Q \frac{k\cdot Q'}{k\cdot Q} \\
&- \frac{\bar{n}}{E_q} 2A_1\cdot Q'A_2\cdot Q' \frac{k\cdot Q}{k\cdot Q'} \Bigg]
\end{aligned}
\tag{18.59}
$$

となる．$\boldsymbol{q}$（あるいは $\boldsymbol{Q}$）方向の角度積分を次の関係式をもちいて実行すると，上式はさらに変形できる．

$$
\begin{aligned}
&\int d\Omega \left(2A_1\cdot QA_2\cdot Q - A_1\cdot QA_2\cdot Q' - A_1\cdot Q'A_2\cdot Q + 2A_1\cdot A_2\right) \\
&\qquad = \int d\Omega \left(2A_1\cdot QA_2\cdot Q'\right).
\end{aligned}
\tag{18.60}
$$

ここで,

$$A_+ = \frac{A \cdot Q}{2}, \qquad A_- = \frac{A \cdot Q'}{2} \tag{18.61}$$

と定義すると, (18.59) は

$$\Gamma^{(2)} = \frac{1}{2}\int d\mu(k) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_q}\, f(A, n, \bar{n}),$$
$$f(A, n, \bar{n}) = 16\left[A_{1+}A_{2-}(n+\bar{n}) - n\frac{k \cdot Q'}{k \cdot Q}A_{1+}A_{2+} - \bar{n}\frac{k \cdot Q}{k \cdot Q'}A_{1-}A_{2-}\right] \tag{18.62}$$

と書ける.

高温 $T \gg \mu$ では, $n_p \approx \bar{n}_p$ も成り立つ. この場合, 積分を次のように評価することができる.

$$\Gamma^{(2)} = \frac{1}{2}\int d\mu(k)\left(\frac{T^2}{12\pi}\right) \times \int d\Omega\left[2A_{1+}A_{2-} - \frac{k \cdot Q'}{k \cdot Q}A_{1+}A_{2+} - \frac{k \cdot Q}{k \cdot Q'}A_{1-}A_{2-}\right]. \tag{18.63}$$

もう 1 つ興味深い極限として, 高密度状態がある. これは荷電フェルミ粒子の縮退ガスに対応する. この場合, $T \ll \mu$ である. $T/\mu \to 0$ となる極限では, (μ が正のとき) 反粒子の被占数は $\bar{n}_p \to 0$ となる. このとき, (18.62) は

$$\Gamma^{(2)} = \frac{1}{2}\int d\mu(k)\left(\frac{\mu^2}{4\pi^3}\right) \times \int d\Omega\left[2A_{1+}A_{2-} - \frac{k \cdot Q'}{k \cdot Q}A_{1+}A_{2+} - \frac{k \cdot Q}{k \cdot Q'}A_{1-}A_{2-}\right] \tag{18.64}$$

と変形される. ただし $T \to 0$ (μ と比べて小さい) の極限をとった. 有限密度における遮蔽現象は荷電粒子が 1 種類でも起こることに注意しよう. これは, 背景場による共通電荷からの電荷の揺らぎが重要であるためである.

この遮蔽効果の項をもちいて, プラズマ振動を議論できる. $\Gamma^{(2)}$ をマクスウェル作用に加えると, 有限温度での物質分布の効果が組み込まれた有効作用

$$\mathcal{S}_{eff} = -\frac{1}{4e^2}\int F^2 + \Gamma^{(2)} \tag{18.65}$$

を考えることができる. 長波長近似をもちいて $\Gamma^{(2)}$ を変形したので, 上式

は低エネルギー有効作用である．長波長つまり低振動数のプラズマ波は有効理論 (18.65) の古典解である．この理論はクーロン場の遮蔽効果などを含む．A_μ のフーリエ成分をもちいて，有効作用は

$$\mathcal{S}_{eff} = \frac{1}{2}\int A_\mu(-k)M^{\mu\nu}(k)A_\nu(k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tag{18.66}$$

と表せる．ただし，

$$M^{\mu\nu} = (-k^2\eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) + \frac{e^2T^2}{12\pi}\left[4\pi\eta^{\mu0}\eta^{\nu0} - \int d\Omega\,\frac{k_0}{k\cdot Q}Q^\mu Q^\nu\right] \tag{18.67}$$

であり，$k^\mu M_{\mu\nu} = 0$ をみたす．これはゲージ不変性の要請と一致する．上式で，結合定数 e を $A_\mu \to eA_\mu$ とスケール変換して再現させた．つぎに，A_μ をゲージに依存する部分とゲージ不変な成分に分解しよう．

$$A_\mu = k_\mu\Lambda(k) + \zeta_\mu + \xi_\mu. \tag{18.68}$$

ただし，Λ はゲージ変換のもとで変化する．ζ_μ,ξ_μ はゲージ不変量である．ζ_μ, ξ_μ は k_μ に垂直な 3 つの方向に対応し，次のようにパラメータ表示できる．

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= \left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{\boldsymbol{k}^2 - k_0^2}\right)\phi,\\
\zeta_i &= \frac{k_0}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2}}e_i^{(3)}\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{\boldsymbol{k}^2 - k_0^2}\right)\phi,\\
\xi_0 &= 0,\\
\xi_i &= e_i^{(\lambda)}a_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2).
\end{aligned} \tag{18.69}$$

e_i は空間単位ベクトルの 3 成分である．必要であれば，6 章で示したように，次の特定のベクトルを選ぶことができる．

$$\begin{aligned}
e_i^{(3)} &= \frac{k_i}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2}} \quad (i = 1, 2, 3),\\
e_i^{(1)} &= \left(\epsilon_{ij}\frac{k_j}{\sqrt{k_T^2}}, 0\right),\\
e_i^{(2)} &= \left(\frac{k_3k_i}{\sqrt{k_T^2\boldsymbol{k}^2}}, -\sqrt{\frac{k_T^2}{\boldsymbol{k}^2}}\right) \quad (i = 1, 2).
\end{aligned} \tag{18.70}$$

ただし，$k_T^2 = k_1^2 + k_2^2$ である．$k_i e_i^{(\lambda)} = 0$ $(\lambda = 1, 2)$ となることに注意しよう．ϕ と a_λ は (18.68) におけるゲージ不変な自由度である．モード分解 (18.68) を (18.66) に代入すると，

$$\mathcal{S}_{eff} = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\xi_i(-k)\left(\frac{\boldsymbol{k}^2\delta_{ij} - k_i k_j}{\boldsymbol{k}^2}\right)M^T(k)\xi_j(k) + \phi(-k)M^L(k)\phi(k)\right] + \int \phi J^0 + \xi_i J^i \tag{18.71}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned} M^T(k) &= k_0^2 - \boldsymbol{k}^2 - \frac{e^2T^2}{6}\left[\frac{k_0^2}{\boldsymbol{k}^2} + \left(1 - \frac{k_0^2}{\boldsymbol{k}^2}\right)\frac{k_0}{2|\boldsymbol{k}|}L\right], \\ M^L(k) &= \boldsymbol{k}^2 + \frac{e^2T^2}{3}\left[1 - \frac{k_0}{2|\boldsymbol{k}|}L\right], \\ L &= \log\left(\frac{k_0 + k}{k_0 - k}\right) \end{aligned} \tag{18.72}$$

である．(18.71) には，保存される源（ソース）J_μ との相互作用項も含まれている．つまり，$\int A_\mu J^\mu$ を (18.69) で変形したものが追加されている．(18.71) から，プラズマ内の荷電粒子間の相互作用は $(M^L)^{-1}$ に支配されることがわかる．これはデバイ遮蔽を表しており，そのデバイ質量は $m_D = \sqrt{e^2T^2/3}$ である．作用 (18.71) は自由波のような解も与える．これらのプラズマ波の分散関係は，横波については $M^T = 0$，縦波については $(\boldsymbol{k}^2 - k_0^2/\boldsymbol{k}^2)M^L = 0$ で与えられる．(M_L にかかる余分な因子は，$\phi(k)$ をポテンシャルで書き換えると得られる．)

18.7　ゲージ場の遮蔽 —— 非アーベル型の場合

前節ではアーベル型ゲージ場の遮蔽現象について考えた．ここでは，その議論を非アーベル型の理論に拡張してみよう．これは，例えば，クォーク–グルーオン・プラズマに対応している．遮蔽効果を表す有効作用 $\Gamma[A]$ の項を考えよう．前節で計算した量は A についての 2 次の項であった．非アーベル型の場合も，リー代数行列のトレースを除けば，この項の構造は同じままである．ただ，この項の係数は変化する．これは，ゲージボソン（あるいはグ

ルーオン）自体もループを伝播し，2点関数に寄与するためである．ところが，ゼロでない高次の N 点関数も多数存在する．これらは，ゲージ不変性から必要とされる．遮蔽は赤外領域あるいは低運動量の効果であるので，外線の運動量がループ運動量に比べて小さい場合に，ループ・ダイヤグラムを変形することを考えよう．ループ運動量の平均値は温度 T のオーダーをもつ．これは，ループ運動量が統計的な分布関数で支配されるためである．よって，外線の運動量が（eT のオーダーで）小さいときに適用できる次数の数え上げ規則を作り，関連するダイヤグラムを分離して考えることができる．これらはループ運動量のオーダーが T で，外線の運動量のオーダーが eT となる1ループ・ダイヤグラムであり，硬熱ループ (hard thermal loop) と呼ばれる．そのようなダイヤグラムを直接計算する代わりに，以下では，ゲージ不変性に基づく議論からループ計算の結果を求めよう．

この議論で重要となる特性は2つあり，それは以下のとおりである．

1. $\Gamma[A]$ はゲージポテンシャル A_μ のゲージ変換についてゲージ不変であり，グルーオン伝播関数を定義する際のゲージ固定に依存しない．
   硬熱ループの力学からいかにしてゲージ不変性が導かれるのかは次のように理解できる．熱伝播関数は温度がゼロの伝播関数と同じ微分方程式をみたす．これは，(18.16) と (18.23) から明らかであろう．分布関数が現れる追加項は，自由粒子の斉次運動方程式に従うので，熱伝播関数と温度がゼロの伝播関数との違いは境界条件の選択の違いだけによる．その結果，1粒子既約の頂点関数つまり $\Gamma[A, c, \bar{c}, \ldots]$ は通常のBRST ウォード–高橋恒等式をみたす．よって，外線のゲージ場だけを残して Γ を考えると (10.123) の恒等式

$$\int d^4x \left[\frac{\delta\Gamma}{\delta A^a_\mu}\frac{\delta\Gamma}{\delta K^{a\mu}} - \frac{\delta\Gamma}{\delta L^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta c^a} - i\frac{\delta\Gamma}{\delta J^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}^a}\right] = 0 \tag{18.73}$$

   が得られる．硬熱ループ近似では，ゴーストの関与する項は副次的である．$(\partial\cdot A)^2$ に比例するゲージ固定項があると，ゴーストとグルーオンの相互作用により $f^{abc}A^{a\mu}(\partial_\mu\bar{c}^b)c^c$ が現れたことを思い出そう．この微分は反ゴースト場にかかっている．ゴーストを外線にもつダイヤグラムにおいて，この微分は外線の運動量の次数をもつ．したがって，そのような

ダイヤグラムはゴーストの外線をグルーオンに置き換えた同様のダイヤグラムよりも低い次数をもつ．グルーオンのダイヤグラムでは，内線にかかる微分それぞれについて次数 T の寄与がある．したがって，(18.73) において $\frac{\delta\Gamma}{\delta c}$, $\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}}$ の項は硬熱ループ近似で無視できる．さらに，ここでは 1 ループの項にしか興味がないので，恒等式 (18.73) はゲージ不変な Γ を与える．したがって，T の大きい高温展開で考えるならば，T^2 に比例する $\Gamma[A]$ の主要項はゲージ不変である．伝播関数への有限温度の寄与は運動方程式を満たしている（on-shell である）ので，1 ループ・ダイヤグラムの T 依存部分は古典的である．よって，BRST ウォード–高橋恒等式がゲージ不変性に帰着されることは驚くべきことではない．Γ がグルーオン伝播関数のゲージの選び方によらないことも同様の議論で理解できる．つまり，ゲージ固定条件を変えたときの Γ の変化に対する恒等式を書き下し，(18.73) の場合と同様にこれを変形することができる．

2. $\Gamma[A]$ は次の形で書ける．

$$\Gamma = \left(N + \frac{1}{2}N_f\right) \frac{T^2}{12\pi} \left[\int d^4x\, 2\pi A_0^a A_0^a + \int d\Omega\, W(A \cdot Q)\right]. \tag{18.74}$$

これは，(18.63) の結果を (18.67) の形で書き換えたものである．角度積分は $\boldsymbol{Q}$ 方向にわたってとられる．ここでは $SU(N)$ ゲージ理論を考えており，N_f はフェルミオンのフレーバー数を与える．この式の要点は，各 $\boldsymbol{Q}$ に対して $\Gamma[A]$ はゲージポテンシャルの 2 成分，すなわち A_0 と $A \cdot Q$ だけで書けることにある．$d\Omega$ 積分はゲージポテンシャルのすべての成分が必要となるが，各 $\boldsymbol{Q}$ については 2 成分だけが必要である．2 点関数の具体的な計算において，$\boldsymbol{Q}$ はループ運動量 $\bar{q}$ の角度部分であった．(18.74) の $d\Omega$ 積分は $\boldsymbol{Q}$ の方向についての積分である．これは，ループ運動量の積分のうち，その絶対値についての積分をした後に残る部分に対応している．(18.74) が一般的な構造をしていることは，ダイヤグラムの解析からも理解できる．例えば，相互作用項 $f^{abc}A_\mu^a A_\nu^b \partial_\mu A_\nu^c$ によるグルーオンの微分項の結合を含むダイヤグラムを考えると，$p \cdot A \approx q \cdot A$ なので，可能なテンソル構造は $q^2 A^2$ か $(q \cdot A)^2$ である．前者はゼロとなる．これは伝播関数の温度依存部分から δ 関数 $\delta(q^2)$ が現れるためで

ある．ここで $q = |\boldsymbol{q}|(1, \boldsymbol{Q})$ と書き，$|\boldsymbol{q}|$ 積分を実行すると，(18.74) のような構造が現れることがわかる．また，この議論はグルーオンの外線の数が任意の場合にも一般化できる．

Γ についてのこれらの 2 つの特性をもちいると，W を決めることができる．したがって，Γ 自体をゲージ不変性の要請だけから決めることができる．まず，2 つの微分演算子 $\partial_+ = \frac{1}{2}Q \cdot \partial$ と $\partial_- = \frac{1}{2}Q' \cdot \partial$ を定義しよう．これは (18.61) における $A_\pm$ の定義に類似したものである．このとき，Γ のゲージ不変条件は

$$\int d\Omega \left(\left[D_+ \left(\frac{\delta W}{\delta A_+} \right) \right]^a + 4\pi \partial_0 A_0^a \right) = 0 \tag{18.75}$$

となる．恒等式

$$4\pi \partial_0 A_0^a = \int d\Omega\ \partial_0 (Q \cdot A^a) = 2\,(\partial_+ + \partial_-) A_+^a \tag{18.76}$$

をもちいると，ゲージ不変性の条件式 (18.75) は次の関係式が成り立つと満たされることがわかる．

$$\left[D_+ \left(\frac{\delta W}{\delta A_+} \right) \right] + 2\,\partial_+ A_+ + 2\,\partial_- A_+ = 0. \tag{18.77}$$

さらに，$\mathcal{A}_-$ を

$$\frac{\delta W}{\delta A_+^a} = -2\,\mathcal{A}_-^a - 2\,A_+^a \tag{18.78}$$

で定義すると，式 (18.77) は

$$D_+ \mathcal{A}_- - \partial_- A_+ = 0 \tag{18.79}$$

となる．これは WZW 理論で現れた式 (17.53)

$$\partial_{\bar{z}} A_z - \partial_z \bar{\mathcal{A}} + [\bar{\mathcal{A}}, A_z] = 0 \tag{18.80}$$

と似た形をしている．式 (18.80) はユークリッド空間の WZW 作用から導かれた．いまの場合は，ミンコフスキー符号をもちいて WZW 作用を定義するほうが便利である．2 次元空間上の微分を $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1)$ で表すと，

$$\mathcal{S}_{WZW}(U) = \frac{1}{2\pi} \int d^2x\ \mathrm{Tr}\left(\partial_+ U \partial_- U^{-1} \right)$$

$$+\frac{1}{12\pi}\int_{\mathcal{M}^3} d^3x\,\epsilon^{\mu\nu\alpha}\mathrm{Tr}(\partial_\mu UU^{-1}\partial_\nu UU^{-1}\partial_\alpha UU^{-1}) \quad (18.81)$$

となる．この WZW 作用についてのポリヤコフ–ウィグマン恒等式は

$$\mathcal{S}_{WZW}(hU) = \mathcal{S}_{WZW}(h)+\mathcal{S}_{WZW}(U)-\frac{1}{\pi}\int d^2x\,\mathrm{Tr}(h^{-1}\partial_- h\,\partial_+ UU^{-1}) \quad (18.82)$$

である．さらに，$A_+=-\partial_+ UU^{-1}$ と定義すると，

$$\delta\mathcal{S}_{WZW}(U) = -\frac{1}{\pi}\int d^2x\ \mathrm{Tr}(\mathcal{A}_-\delta A_+) \quad (18.83)$$

となることがわかる．これは (17.51) に対応する式である．

いま考えている 4 次元の場合，$\partial_+=\frac{1}{2}Q\cdot\partial$ は可逆であることに注意しよう．すなわち，

$$\begin{aligned}\partial_+ G(x,y) &= \delta^{(4)}(x-y),\\ G(x,y) &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ip(x-y)}\frac{2}{ip\cdot Q}\end{aligned} \quad (18.84)$$

と表せる．したがって，

$$A_+ = -\partial_+ U\,U^{-1} \quad (18.85)$$

となるユニタリー行列 U を実際に定義することができる.（この方程式は，少なくとも A の級数として，U について解けることに注意しよう.）ここで興味のある方程式は横成分の座標 x^T $(Q\cdot x^T=Q'\cdot x^T=0)$ についての微分を含まない．この座標は単にパラメータとして振る舞い，場はこのパラメータに依存しうる．このとき，恒等式 (18.83) を使うと，W の解を

$$W=2\int d^4x\ \mathrm{Tr}(A_+A_+)-4\pi\int d^2x^T S_{WZW}(U) \quad (18.86)$$

と表せる．WZW 作用は横成分の座標で積分されなければならない．これは，もともとの WZW 作用が 2 次元で定義されており，$x^{\pm}$ 座標についてだけの積分を持つためである．式 (18.86) から

$$\begin{aligned}\Gamma = \left(N+\frac{1}{2}N_f\right)\frac{T^2}{12\pi}\Bigg[&\int d^4x\ 2\pi A_0^aA_0^a\\ &+\int d\Omega\left\{2\int d^4x\ \mathrm{Tr}(A_+A_+)-4\pi\int d^2x^T\mathcal{S}_{WZW}(U)\right\}\Bigg]\end{aligned} \quad (18.87)$$

となることがわかる．上式をよりわかりやすくするために，もう 1 つ別のユニタリー行列 V を導入しよう．ただし，この行列は

$$A_{-} = -\partial_{-}V^{\dagger}V = V^{\dagger}\partial_{-}V \tag{18.88}$$

で定義され，そのため $Q \leftrightarrow Q'$ の変換のもとで $U \leftrightarrow V^{\dagger}$ となる．$\boldsymbol{Q}$ のすべての方向で積分するので，$\int d\Omega\, S_{WZW}(U) = \int d\Omega\, S_{WZW}(V^{\dagger})$ となる．さらに，単純に $d\Omega$ 積分を行うと，恒等式

$$2\pi A_0^a A_0^a + 2\int d\Omega\ \mathrm{Tr}(A_{+}A_{+}) = -2\int d\Omega\ \mathrm{Tr}(A_{+}A_{-}) \tag{18.89}$$

が成り立つ．これら 2 つの結果をもちいると，非アーベル型理論の遮蔽効果を記述する有効作用を最終的に

$$\begin{aligned}\Gamma[A] &= \left(N + \frac{1}{2}N_f\right)\frac{T^2}{12\pi}(-2\pi)\int\left[\frac{1}{\pi}\mathrm{Tr}(A_{+}A_{-})\right.\\ &\qquad\left. + \mathcal{S}_{WZW}(U) + \mathcal{S}_{WZW}(V^{\dagger})\right]\\ &= -\left(N + \frac{1}{2}N_f\right)\frac{T^2}{6}\int d^2x^T d\Omega\ \mathcal{S}_{WZW}(V^{\dagger}U)\end{aligned} \tag{18.90}$$

の形で表せる．ただし，2 行目でポリヤコフ–ウィグマン恒等式をもちいた．

したがって，有効作用に現れる遮蔽効果の項の最終的な形は非常に単純明快である．つまり，この項は単位ベクトル $\boldsymbol{Q}$ がその方向を特定するような光錐，すなわち $x^0 \pm \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x}$ を満たす空間上にある場に対するゲージ不変な WZW 作用で与えられる．一般に，場は横成分の座標にも依存する．このとき，WZW 作用は横成分方向と $\boldsymbol{Q}$ つまり光錐のすべての方向にわたって積分される．

低温・高密度におけるフェルミ粒子ガスの遮蔽現象についても同様な結果を導くことができる．(18.64) を求めたときと同じように計算すると，

$$\Gamma[A] = -\frac{1}{2}N_f\frac{\mu^2}{2\pi^2}\int d^2x^T d\Omega\ \mathcal{S}_{WZW}(V^{\dagger}U) \tag{18.91}$$

がわかる．ただし，μ は化学ポテンシャルである．(これらの式では，ゲージポテンシャルは反エルミート行列 $A_\mu = -it^a A_\mu^a$ である．ただし，アーベル型の場合は，エルミート成分をもちいるほうが通例なので，式 (18.64) ではそれに従った.)

18.8　遅延・時間順序関数と久保公式

前の 2 節では，時間順序積をもちいて A_μ の 2 点頂点関数の実部を計算した．さらに，より一般に，プラズマ波の伝播も記述する有効作用の遮蔽項を求めた．しかし，次に述べるように，虚部について物理的に意味のある結果を得るには遅延関数をもちいなければならない．

散乱理論で興味ある量は，ある時刻において本質的に自由粒子の状態である $|i\rangle$ が，時間発展後に（本質的に自由粒子の）状態 $|f\rangle$ として観測される確率振幅である．これには，状態 $|i\rangle$ の時間発展を求め，さらに状態 $|f\rangle$ との重なり積分を行わなければならない．時間発展は，当然，時間順序過程なので，S 行列には時間順序積が現れる．状態 $|f\rangle$ は自由場の理論として発展することに注意しよう．したがって，シュレーディンガー描像をもちいると，確率振幅は $\langle f|e^{iH_0t}e^{-iHt}|i\rangle$ の形に書ける．ただし，H_0 は自由場の理論のハミルトニアンであり，H は相互作用を含む真のハミルトニアンである．ここで，

$$U(t,t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \tag{18.92}$$

と定義すると，

$$\begin{aligned} i\frac{\partial U}{\partial t} &= e^{iH_0(t-t_0)}H_{int}e^{-iH(t-t_0)} \\ &= H_{int}(\phi_{in})U \end{aligned} \tag{18.93}$$

となることがわかる．上式 2 行目で場 ϕ_{in} は $\phi_{in} = e^{iH_0(t-t_0)}\,\phi\, e^{-iH_0(t-t_0)}$ で定義されている．したがって，これは自由なハイゼンベルク場として発展する．式 (18.93) を積分すると散乱演算子の公式 (5.72)

$$\begin{aligned} \hat{S} &= T\,e^{iS_{int}(\phi_{in})} = U(\infty,-\infty), \\ U(x^0,y^0) &= T\exp\left[i\int_{y^0}^{x^0} d^4x\ \mathcal{L}_{int}(\phi_{in}(x))\right] \end{aligned} \tag{18.94}$$

が得られる．ただし，これは相互作用項に少なくとも微分による結合がない場合に限られる．(微分結合項があると，$H_{int} = -\mathcal{L}_{int}$ とならないので，この場合はより複雑な解析が必要になる．)

しかしながら，もし場の配位の時間発展を求めなければならないとすると，

シュレーディンガー描像の行列要素を計算する必要がある．この描像では関与する状態はともにハミルトニアン H に従って発展する．すなわち，

$$\langle\phi\rangle = \langle x^0 = 0|e^{iHx^0}\phi e^{-iHx^0}|x^0 = 0\rangle \tag{18.95}$$

が必要となる．あるいは，同様にハイゼンベルク場 $\phi(x^0) = e^{iHx^0}\phi e^{-iHx^0}$ についてハイゼンベルクの運動方程式を解かなければならない．ここで求めたいのは，「始状態の場の演算子が与えられたときに，それが時間発展後にどのような場の演算子になるか？」ということである．これを解くには，(5.81) にあるように遅延グリーン関数が必要となる．電磁力学の場合も同様に，場 A_μ による摂動を媒質に与えたときに，どのような誘導カレントが現れるかを問うことができる．これは媒質の伝導率を求めることに対応する．この場合には，S 行列のときと異なり終状態は特定されない．

スカラー場の場合は，運動方程式は式 (5.77)，すなわち

$$(\Box + m^2)\phi(x) = \rho(x) \tag{18.96}$$

で与えられる．ここで，源 $\rho(x)$ は散乱演算子をもちいて式 (5.83) で

$$\begin{aligned}\rho(x) &\equiv -i\hat{S}^{-1}\frac{\delta\hat{S}}{\delta\phi_{in}(x)} \\ &= \frac{\delta\mathcal{S}_{int}(\phi)}{\delta\phi(y)}\end{aligned} \tag{18.97}$$

と与えられた．電磁力学に対応する方程式も簡単に求めることができ，

$$\partial_\nu F^{\nu\mu}(x) = i\hat{S}^{-1}\frac{\delta\hat{S}}{\delta A_\mu(x)} \tag{18.98}$$

となる．ここで，カレント J^μ は

$$J^\mu(x) = i\hat{S}^{-1}\frac{\delta\hat{S}}{\delta A_\mu(x)} \tag{18.99}$$

で与えられる．(式 (18.98) でゲージ選択は特定されていないが，ゲージを固定することもできる．例えば，ラグランジアンに $-\frac{1}{2}(\partial\cdot A)^2$ の項を加えると，左辺は $\Box A^\mu$ となる.) 散乱演算子 $\hat{S}$ は $T\exp[ie\int d^4x A_\mu j^\mu]$ で与えられる．ただし，$j^\mu = \bar{\psi}_{in}\gamma^\mu\psi_{in}$ は入射場についてのカレントである．

式 (18.99) をもちいて，J^μ を A_μ の級数展開として求めることができる．

特に，(18.99) のテイラー展開を A の 1 次のオーダーで求めると，

$$J^\mu(x) = ej^\mu(x) - ie^2 \int d^4y \;\; \theta(x^0 - y^0)[j^\mu(x), j^\nu(y)]A_\nu(y) \tag{18.100}$$

となる．これを (18.98) に代入し，密度行列をもちいて平均をとると，

$$\partial_\nu F^{\nu\mu}(x) = \int d^4y \; \Pi_R^{\mu\nu}(x,y)\, A_\nu(y) \tag{18.101}$$

と書ける．ただし，

$$\Pi_R^{\mu\nu}(x,y) = -ie^2\, \theta(x^0 - y^0)\; \langle [j^\mu(x), j^\nu(y)] \rangle \tag{18.102}$$

である．山形括弧は摂動を受けない密度行列による平均値を表すので，$\langle j^\mu \rangle$ はゼロとなる．したがって，式 (18.101) の応答関数つまり遅延交換子の平均 (18.102) は，外場による媒質の摂動を与えたときに媒質がどのように時間発展するのかを調べるのに適している．式 (18.102) は久保公式として知られており，物性物理学において広くもちいられている．

つぎに，有限温度のプラズマについてこの計算を考えてみよう．ウィック縮約をとり，熱伝播関数 (18.22), (18.23) をもちい，以前と同様に収束因子をつけて時間積分を行うと，

$$\Pi^{\mu\nu}(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \Pi^{\mu\nu}(k), \tag{18.103}$$

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(k) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{1}{2E_q} & \\ \times \Bigg[T^{\mu\nu}(p,q) & \left(\frac{\alpha_p\beta_q}{E_p - E_q - k_0 - i\epsilon} - \frac{\alpha_q\beta_p}{E_p - E_q - k_0 - i\epsilon} \right) \\ + T^{\mu\nu}(p,q') & \left(\frac{\alpha_p\bar{\alpha}_q}{E_p + E_q - k_0 - i\epsilon} - \frac{\beta_p\bar{\beta}_q}{E_p + E_q - k_0 - i\epsilon} \right) \\ + T^{\mu\nu}(p',q) & \left(\frac{\bar{\alpha}_p\alpha_q}{E_p + E_q + k_0 + i\epsilon} - \frac{\bar{\beta}_p\beta_q}{E_p + E_q + k_0 + i\epsilon} \right) \\ + T^{\mu\nu}(p',q') & \left(\frac{\bar{\alpha}_p\bar{\beta}_q}{E_p - E_q + k_0 + i\epsilon} - \frac{\bar{\beta}_p\bar{\alpha}_q}{E_p - E_q + k_0 + i\epsilon} \right) \Bigg] \end{aligned} \tag{18.104}$$

を得る．ただし，$T^{\mu\nu}(p,q) \equiv \mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu \;\gamma \cdot p \;\gamma^\nu \;\gamma \cdot q)$, $p'^\mu = (E_p, -\boldsymbol{p})$, $q'^\mu = (E_q, -\boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{k}$ である．

式 (18.104) は，一部の $i\epsilon$ の符号を除いて，$\Gamma^{(2)}$ で求めた形とまったく同じであることに注意しよう．(18.104) の遅延関数はその実部を $k_0 \to k_0 + i\epsilon$ と解析接続することで得られる．$\Pi^{\mu\nu}(k)$ の実部は時間順序関数，遅延関数の両方で同じである．ここで，公式

$$\frac{1}{z - i\epsilon} = P\frac{1}{z} + i\pi\delta(z) \tag{18.105}$$

をもちいると，温度に比べて小さい運動量をもつゲージ場について，遅延関数 (18.104) の虚部を計算できる．

(18.104) において $T^{\mu\nu}(p,q')$ と $T^{\mu\nu}(p',q)$ の項の寄与は，k が T に比べて小さいときに副次的である．これは，虚部が $\delta(E_p + E_q \pm k_0)$ という δ 関数をもち，$k \to 0$ で積分に寄与しないためである．$\Pi^{\mu\nu}$ の虚部への主要な寄与は，$T^{\mu\nu}(p,q), T^{\mu\nu}(p',q')$ の項によるものであり，

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\Pi_R^{\mu\nu} = \pi \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\frac{1}{2E_q}\Big[&T^{\mu\nu}(p,q)\,(n_q - n_p)\,\delta(E_p - E_q - k_0) \\ &- T^{\mu\nu}(p',q')\,(\bar{n}_q - \bar{n}_p)\,\delta(E_p - E_q + k_0)\Big]\end{aligned} \tag{18.106}$$

で与えられる．

$|\boldsymbol{k}|$ が $|\boldsymbol{p}|, |\boldsymbol{q}|$ に比べて小さく，$|\boldsymbol{p}|, |\boldsymbol{q}|$ が T のオーダーのとき，(18.56) 以降と (18.57) で示したのと同じ変形を行うことができる．これらを使うと，式 (18.106) は

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\Pi_R^{\mu\nu} &\simeq \frac{k_0 P^{\mu\nu}}{2\pi^2}\int_0^\infty dq\ q(n_q + \bar{n}_q) \\ &= \frac{k_0 T^2}{12}P^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{18.107}$$

と近似できる．ただし，

$$P^{\mu\nu} = \int d\Omega\ \delta(k\cdot Q)Q^\mu Q^\nu \tag{18.108}$$

であり，$n = \bar{n}$ とした．(18.108) の積分は単位ベクトル $\boldsymbol{Q} = \hat{q}$ の向きにわたってとられる．$P^{\mu\nu}$ は横成分で表され，トレースがゼロとなる量であるが，δ 関数により，空間的な k だけが積分に寄与する．角度積分を実行すると

$$P^{\mu\nu} = -k^2\theta(-k^2)\frac{6\pi}{|\boldsymbol{k}|^3}\left[\frac{1}{3}P_1^{\mu\nu} + \frac{1}{2}P_2^{\mu\nu}\right] \tag{18.109}$$

となる．ただし，

$$P_1^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \tag{18.110}$$

および

$$\begin{aligned} P_2^{\mu 0} &= P_2^{0\nu} = 0, \\ P_2^{ij} &= \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\boldsymbol{k}|^2} \end{aligned} \tag{18.111}$$

である．$\theta(-k^2)$ はステップ関数であり，$k^2 < 0$ のとき $\theta(-k^2) = 1$, $k^2 > 0$ のとき $\theta(-k^2) = 0$ である．

18.9 $\mathrm{Im}\,\Pi_R^{\mu\nu}$ の物理的な意味

熱源からの輻射の場合ですでに見たように，遅延関数が重要な量となることは自然に理解できる．また，上の議論から，場の配位の時間発展や誘導電流などについても遅延関数が重要であることがわかる．プラズマについて言えば，$\Pi_R^{\mu\nu}$ の虚部は空間的な運動量をもつ場に対するランダウ減衰 (damping) を記述する．これは，$\Pi_R^{\mu\nu}$ についての直接的な解釈を与える．具体的に

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, e^{-ikx} A_\mu(k) \tag{18.112}$$

を考え，

$$A_\mu(k) = \delta(k_0 - \omega(\boldsymbol{k})) A_\mu(k) + \delta(k_0 + \omega(\boldsymbol{k})) A_\mu^\dagger(k) \tag{18.113}$$

$(\omega^2 < \boldsymbol{k}^2)$ としよう．振幅 $A_\mu(k)$, $A_\mu^\dagger(k)$ はそれぞれ正負の振動項を表し，吸収・放出過程に対応している．プラズマにおける場の崩壊はフェルミ粒子と反フェルミ粒子による吸収過程によって起きる．フェルミ粒子による吸収の振幅は，結合定数について最低次のオーダーで，

$$\mathcal{A} = i\bar{u}_p(\gamma \cdot A) u_q (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q - k) \sqrt{n_q(1 - n_p)} \tag{18.114}$$

で与えられる．ここで，u_p, u_q はそれぞれ放射・入射フェルミ粒子の波動関数である．因子 $\sqrt{n_q(1 - n_p)}$ については，物理的な解釈が次のようにできる．始状態のフェルミ粒子は被占数が n_q の状態から選ばれ，その確率振幅

は $\sqrt{n_q}$ である．また，終状態のフェルミ粒子は被占数が n_p の状態に散乱され，このとき排他律に従い $\sqrt{1-n_p}$ の因子をもつ．(18.114) にあるように，1 量子の吸収は運動量の保存から空間方向の運動量領域で許される．これは，実は 7 章で議論したチェレンコフ放射とは逆の散乱過程である．(18.114) のような公式で $p \leftrightarrow q$, $A \leftrightarrow A^\dagger$ とすると，フェルミ粒子からの（チェレンコフ）放射によって，モード $(\omega, \boldsymbol{k})$ を生成することもできる．また，反フェルミ粒子による同様の寄与も存在する．よって，単位時空間領域における全吸収確率 γ は，すべてのフェルミオン状態についての和をとって，

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_p}\,\frac{1}{2E_q}\,A_\mu^\dagger(k)\mathcal{T}^{\mu\nu}(p,q)A_\nu(k), \\
\mathcal{T}^{\mu\nu}(p,q) &= 2\pi\delta(E_p-E_q-k_0)\,T^{\mu\nu}(p,q)\,(n_q(1-n_p)-n_p(1-n_q)) \\
&\quad + 2\pi\delta(E_p-E_q+k_0)\,T^{\mu\nu}(p',q')\,(\bar{n}_p(1-\bar{n}_q)-\bar{n}_q(1-\bar{n}_p))
\end{aligned}
\tag{18.115}
$$

となることがわかる．これを (18.106) と比べると

$$
\gamma = 2A_\mu^\dagger(k)\,[\mathrm{Im}\,\Pi_R^{\mu\nu}(k_0)]\,A_\nu(k) \tag{18.116}
$$

がわかる．

ゲージポテンシャルのパラメータ表示 (18.68), (18.69) をもちいると，これは

$$
\gamma = T^2\frac{\pi\omega}{|\boldsymbol{k}|}\left[\frac{1}{3}\phi^\dagger\phi + \frac{1}{6}\left(1-\frac{\omega^2}{\boldsymbol{k}^2}\right)\boldsymbol{A}_T^\dagger\cdot\boldsymbol{A}_T\right] \tag{18.117}
$$

と書ける．ただし，$\omega = |\boldsymbol{k}|$ である．γ は明らかに正であるが，これは吸収あるいは減衰の総和を表すので，当然期待されることである．

まとめると，遅延交換子が演算子の運動方程式やランダウ減衰などに関連していることがわかった．しかし，時間成分の非対称性により，遅延交換子は対称的な時間順序積を必然的に含む有効理論の変分から導くことはできない．より一般的な形式化は，$-\infty$ から ∞ へ行きさらに ∞ から $-\infty$ へ戻ってくる経路に沿った時間積分で定義される汎関数積分と有効作用で与えられる．この形式化は，これまで考えてきた平衡状態に近い状況に適用できるだけでなく，非平衡現象を場の量子論で扱う一般論を与える．次節では，このアプローチについて簡単に議論しよう．

18.10 非平衡現象と量子的な気体分子運動論

古典物理学では，1 粒子分布関数の時間発展はボルツマン方程式で与えられる．より一般に，統計的な分布の発展はリューヴィル方程式で与えられる．多粒子系でこれを一般に解くことは非常に難しいので，通常，1 粒子あるいは場合によっては 2 粒子の分布関数に制限して近似を行う．気体分子運動論をもちいた非平衡現象の記述はこれらの近似から発展したものである．ここでは，場の量子論的な気体分子運動論について簡単に議論しよう．

対象となる物理量の統計的な平均値は密度行列 ρ をもちいて計算される．スカラー場 ϕ のとき，1 粒子演算子は $\hat{M} = \int_{x,y} \phi(x)M(x,y)\phi(y)$ の形をもつ．ただし，$M(x,y)$ は ϕ によらない．よって，平均は

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\hat{M}\rho &= \int_{x,y} M(x,y)\mathrm{Tr}\left[\phi(y)\rho\phi(x)\right], \\ &= \int_{x,y} M(x,y)\,F(y,x), \qquad (18.118) \\ F(x,y) &= \mathrm{Tr}\left[\phi(x)\,\rho\,\phi(y)\right] \end{aligned}$$

で与えられる．$F(x,y)$ は 1 粒子の分布関数である．同様に，多粒子演算子に対応する多点関数の期待値を定義できる．分子運動論では，そのような関数，あるいは関数のみたす連立方程式を計算する手法が必要となる．$y^0 > x^0$ のとき，$F(x,y) = \mathrm{Tr}[\rho T(\phi(y)\phi(x))] = \langle T\phi(y)\phi(x)\rangle = G(y,x)$ となることに注意しよう．よって，これは媒質中で計算された伝播関数で求めることができる．しかし，$x^0 > y^0$ のとき，$F(x,y)$ を時間順序関数で表すことはできない．そこで，汎関数

$$Z[J,\tilde{J}] = \mathrm{Tr}\left[Te^{\int_{-\infty}^{\infty} J\phi}\,\rho_0\,\bar{T}e^{\int_{\infty}^{-\infty}\tilde{J}\phi}\right] \qquad (18.119)$$

を定義しよう．ただし，T はこれまでどおり時間順序を表し，$\bar{T}$ は反時間順序を表す．つまり，

$$\bar{T}e^{\int_{\infty}^{-\infty}\tilde{J}\phi} = e^{\int_{-\tau+\epsilon}^{-\tau}\tilde{J}\phi}\,e^{\int_{-\tau+2\epsilon}^{-\tau+\epsilon}\tilde{J}\phi}\cdots e^{\int_{\tau}^{\tau-\epsilon}\tilde{J}\phi}\Bigg]_{\tau\to\infty} \qquad (18.120)$$

である．式 (18.119) の $Z[J,\tilde{J}]$ には，自由な密度行列 ρ_0 が現れる．ここでは

ハイゼンベルク描像が使われており，場は相互作用する理論の運動方程式に従って時間発展する．つまり，相互作用の効果は場に含まれる．これらより，

$$F(x,y) = \left[\frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x)\delta\tilde{J}(y)}\right]_{J=\tilde{J}=0} \tag{18.121}$$

と書けることは明らかであろう．多粒子演算子に必要な ϕ について高次の相関関数も，J, $\tilde{J}$ の微分をさらに (18.119) へ施すことによって得られる．トレースの巡回不変性から，(18.119) は

$$Z[J,\tilde{J}] = \mathrm{Tr}\left[T_C e^{\oint J\phi}\rho_0\right] = \langle T_C e^{\oint J\phi}\rangle \tag{18.122}$$

と表せる．ここで，C は，$-\infty$ から出発し ∞ に行き，再び $-\infty$ に戻る時間積分の経路を表す．戻ってくる経路に沿った J は $\tilde{J}$ である．複数の場が関与する場合は，それぞれの場についての源（ソース）関数が含まれる．Z は汎関数積分か汎関数方程式，あるいは汎関数方程式の和を部分的にとったもの（つまりシュウィンガー–ダイソン方程式）で定義できる．さまざまな多粒子関数に対するこれらの方程式は階層構造を成し，これらによって，理論は完全に特徴づけられる．例えば，ϕ が運動方程式

$$[\Box_x + m^2 + U(x)]\phi(x) - \rho(x) = 0 \tag{18.123}$$

をみたすとしよう．ここで，$\rho(x)$ は ϕ に依存し，ϕ は他の場と結合できるとする.（この $\rho(x)$ は (5.83) と (18.97) で与えられた場のソースであり，密度行列ではない．以下では，密度行列は現れない.）ここでは，一般化のため，背景ポテンシャル $U(x)$ も含まれている．よって，Z の運動方程式は

$$\begin{aligned} K_1\frac{\delta Z}{\delta J(1)} - \hat{\rho}(1)Z &= -iJ(1)Z, \\ K_1\frac{\delta Z}{\delta \tilde{J}(1)} - \hat{\tilde{\rho}}(1)Z &= -i\tilde{J}(1)Z \end{aligned} \tag{18.124}$$

で与えられる．ただし，$K_x = \Box_x + m^2 + U(x)$ である．$\hat{\rho}(1)$ は ρ に現れる場の演算子をソースの微分で置き換えたものを表す．また，$\hat{\tilde{\rho}}$ はチルダのついた微分で置き換えたものである．例として，相互作用項が 2 つのスカラー場 ϕ, χ で $S_{int} = \lambda\int\phi^2\chi$ と書ける場合を考えると，このとき $\rho = 2\lambda\phi\chi$ および

$$\hat{\rho}(1) = 2\lambda \frac{\delta}{\delta J(1)} \frac{\delta}{\delta \eta(1)},$$
$$\hat{\tilde{\rho}}(1) = 2\lambda \frac{\delta}{\delta \tilde{J}(1)} \frac{\delta}{\delta \tilde{\eta}(1)} \tag{18.125}$$

となる．ここで，η は χ のソース関数である．

(18.124) の第 1 式を J について微分し，J, $\tilde{J}$ をゼロとすると，時間順序化された相関関数の方程式が得られる．(18.124) の第 2 式からは反時間順序化された相関関数の式が得られる．この両方から，$F(x,y)$ さらには多粒子系へ一般化された方程式が得られる．最も簡単な 1 粒子レベルでは，

$$K_x F(x,y) = \hat{\rho}(x) \frac{\delta}{\delta \tilde{J}(y)} Z,$$
$$K_y F(x,y) = \frac{\delta}{\delta J(x)} \hat{\tilde{\rho}}(y) Z \tag{18.126}$$

となる．

つぎに，(18.126) の右辺の構造をもう少し詳しく見てみよう．$S_{int} = \lambda \int \phi^2 \chi$ の例をとり，8 章で行ったシュウィンガー–ダイソン方程式の導出に沿って変形すると，

$$\hat{\rho}(x) \frac{\delta}{\delta \tilde{J}(y)} Z = i \int_z \left[\Sigma(x,z) F(z,y) - \mathcal{E}(x,z) G^*(z,y) \right],$$
$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \hat{\tilde{\rho}}(y) Z = i \int_z \left[G(x,z) \mathcal{E}(z,y) - F(x,z) \Sigma^*(z,y) \right] \tag{18.127}$$

と書けることがわかる．ただし，

$$\mathcal{E}(x,z) = 4\lambda^2 F_\phi(x,z)\, F_\chi(x,z),$$
$$\Sigma(x,z) = 4\lambda^2 G_\phi(x,z)\, G_\chi(x,z) \tag{18.128}$$

である．定義から，

$$G(x,z) = \theta(x^0 - z^0) F^*(x,z) + \theta(z^0 - x^0) F(x,z) \tag{18.129}$$

となるので，

$$\Sigma(x,z) = \theta(x^0 - z^0) \mathcal{E}^*(x,z) + \theta(z^0 - x^0) \mathcal{E}(x,z) \tag{18.130}$$

と書ける．より一般的な相互作用項の場合，自己エネルギー (18.128) の形は変化するが，式 (18.127) と (18.130) の一般形は変化しない．(18.127) を

(18.126) に代入し，z^0 積分の適切な積分範囲を明示すると，

$$
\begin{aligned}
K_x F(x,y) = -i \Bigg[\int_{-\infty}^{x^0} (\mathcal{E} - \mathcal{E}^*)(x,z) F(z,y) \\
- \int_{-\infty}^{y^0} \mathcal{E}(x,z)(F - F^*)(z,y) \Bigg], \\
K_y F(x,y) = -i \Bigg[\int_{-\infty}^{x^0} (F - F^*)(x,z) \mathcal{E}(z,y) \\
- \int_{-\infty}^{y^0} F(x,z)(\mathcal{E} - \mathcal{E}^*)(z,y) \Bigg]
\end{aligned}
\tag{18.131}
$$

となる．これらの式はカダノフ–ベイム (Kadanoff–Baym) 方程式として知られている．これは量子化された 1 粒子ボルツマン方程式の 1 つである．

ボルツマン方程式は (18.131) にさらなる近似を課すと現れる．まず，上で与えられた 2 式の差をとってみよう．

$$
\begin{aligned}
(K_x - K_y)\, F(x,y) = -i \Bigg[\int_{-\infty}^{x^0} [(\mathcal{E} - \mathcal{E}^*)F - (F - F^*)\mathcal{E}] \\
- \int_{-\infty}^{y^0} [\mathcal{E}(F - F^*) - F(\mathcal{E} - \mathcal{E}^*)] \Bigg].
\end{aligned}
\tag{18.132}
$$

つぎに，$F(x,y)$ を

$$
F(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)}\, F(p,X) \tag{18.133}
$$

と表そう．ただし，$X = \frac{1}{2}(x+y)$ である．ポテンシャルは粒子間の相互作用のスケールに対してゆっくりと変化するものとする．よって，$U(x)$ は相対座標 $x - y$ の 1 次の項までの展開式で近似できる．この場合，

$$
(K_x - K_y)\, F(x,y) \approx i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[2\, p^\mu \frac{\partial F}{\partial X^\mu} + \frac{\partial F}{\partial p_\mu} \frac{\partial U}{\partial X^\mu} \right] e^{ip(x-y)} \tag{18.134}
$$

となる．(18.132) の右辺の項に対しては，変数変換

$$\frac{1}{2}(x+z) = X + \frac{1}{2}(\xi+\zeta),$$
$$\frac{1}{2}(z+y) = X + \frac{1}{2}\zeta, \tag{18.135}$$
$$x - y = \xi, \qquad z - x = \zeta$$

を行い，すべての項を ξ, ζ の最低次のオーダーまで展開しよう．例えば，第1項は次のように近似できる．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x^0}(\mathcal{E}-\mathcal{E}^*)F &= \int_{-\infty}^{0} d^4\zeta\,(\mathcal{E}-\mathcal{E}^*)(X+\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{2}\zeta,-\zeta)\,F(X+\frac{1}{2}\zeta,\xi+\zeta)\\ &\approx \int_{-\infty}^{0} d^4\zeta\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\,(\mathcal{E}-\mathcal{E}^*)(X,-\zeta)\,F(X,\xi+\zeta)\\ &\approx \int_{-\infty}^{0} d^4\zeta\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\,(\mathcal{E}-\mathcal{E}^*)(X,p_2)\,F(X,p_1)\\ &\qquad \times \exp\left[ip_1(\xi+\zeta)-ip_2\zeta\right].\end{aligned} \tag{18.136}$$

同様に，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{y^0}F(\mathcal{E}-\mathcal{E}^*) &\approx \int_{-\infty}^{0} d^4\zeta\;\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\,F(X,p_2)(\mathcal{E}-\mathcal{E}^*)(X,p_1)\\ &\qquad \times \exp\left[ip_1(\xi+\zeta)-ip_2\zeta\right]\\ &\approx \int_{0}^{\infty} d^4\zeta\;\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\,F(X,p_1)(\mathcal{E}-\mathcal{E}^*)(X,p_2)\\ &\qquad \times \exp\left[ip_2(\xi-\zeta)+ip_1\zeta\right]\end{aligned} \tag{18.137}$$

となる．この2式 (18.136), (18.137) は組み合わせることができ，ζ と運動量の1つで積分すると，

$$\int_{-\infty}^{x^0}(\mathcal{E}-\mathcal{E}^*)F+\int_{-\infty}^{y^0}F(\mathcal{E}-\mathcal{E}^*) \approx \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(\mathcal{E}-\mathcal{E}^*)F(X,p)e^{ip\xi} \tag{18.138}$$

が与えられる．(18.132) の右辺にあるこれ以外の2項についても同様に変形することができ，

$$\int_{-\infty}^{y^0}\mathcal{E}(F-F^*)+\int_{-\infty}^{x^0}(F-F^*)\mathcal{E} \approx \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathcal{E}(F-F^*)(X,p)e^{ip\xi} \tag{18.139}$$

となる．(18.134), (18.138) および (18.139) から，方程式 (18.132) は

$$\left[2p^\mu \frac{\partial F}{\partial X^\mu} + \frac{\partial F}{\partial p_\mu} \cdot \frac{\partial U}{\partial X^\mu}\right] = \mathcal{E}^* F - \mathcal{E} F^* + \cdots \tag{18.140}$$

となる．省略記号は $(x-y)$ の高次の項が無視されていることを示す．上式はボルツマン方程式であり，右辺は衝突項を表す．

つぎに，衝突項を変形して，上式をよく知られた形で表そう．そのために，まず $U(x)=0$ の場合を考え，摂動計算を行う．以前と同様，$S_{int} = \lambda \int \phi^2 \chi$ となる 2 スカラー場の場合に特定して考えよう．ただし，ϕ, χ の質量はそれぞれ m, M とする．このとき，$F(x,y)$ は

$$\begin{aligned} F_\phi(x,y) &= \sum_k \frac{\alpha_k}{2\omega_k V} e^{ik\cdot(x-y)} + \frac{\beta_k}{2\omega_k V} e^{-ik\cdot(x-y)}, \\ F_\chi(x,y) &= \sum_k \frac{\tilde{\alpha}_k}{2\Omega_k V} e^{ik\cdot(x-y)} + \frac{\tilde{\beta}_k}{2\Omega_k V} e^{-ik\cdot(x-y)} \end{aligned} \tag{18.141}$$

と展開できる．ただし，

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 1 + n_k\,, \quad \beta_k = n_k, \\ \tilde{\alpha}_k &= 1 + N_k\,, \quad \tilde{\beta}_k = N_k \end{aligned} \tag{18.142}$$

である．また (18.141) で，$\omega_k = \sqrt{k^2+m^2}$, $\Omega_k = \sqrt{k^2+M^2}$ である．式 (18.141) は式 (18.16) と類似している．しかし，この段階では n_k, N_k にボース分布を仮定しないものとする．この F の形から，

$$\begin{aligned} F(p) &= 2\pi \left[\frac{\alpha_p}{2\omega_p}\delta(p_0-\omega_p) + \frac{\beta_{-p}}{2\omega_p}\delta(p_0+\omega_p)\right], \\ F^*(p) &= 2\pi \left[\frac{\beta_p}{2\omega_p}\delta(p_0-\omega_p) + \frac{\alpha_{-p}}{2\omega_p}\delta(p_0+\omega_p)\right] \end{aligned} \tag{18.143}$$

がわかる．これらを (18.140) にもちいることができる．また，$\theta(p_0)$ をかけて，p_0 についての積分を行うと α_p についての方程式を取り出すことができる．(18.140) の右辺については，非自明な最低次のオーダーで

$$\mathcal{E}(x,z) = 4\lambda^2 F_\phi(x,z) F_\chi(x,z) \tag{18.144}$$

となることをもちいる．これをフーリエ変換すると，

$$\mathcal{E}(p) = 4\lambda^2 \sum_{k_1,k_2} \frac{(2\pi)^4}{2\omega_{k_1} 2\Omega_{k_2} V^2} \Big[\alpha_{k_1}\tilde{\alpha}_{k_2}\delta^{(4)}(p-k_1-k_2) + \alpha_{k_1}\tilde{\beta}_{k_2}\delta^{(4)}(p-k_1+k_2) + \beta_{k_1}\tilde{\alpha}_{k_2}\delta^{(4)}(p+k_1-k_2) + \beta_{k_1}\tilde{\beta}_{k_2}\delta^{(4)}(p+k_1+k_2) \Big] \tag{18.145}$$

となる．(18.143) の F, F^* を代入し，$\mathcal{E}$ についての上の形を使い，体積が十分に大きい極限をとると，ボルツマン方程式は

$$\begin{aligned} \frac{p^\mu}{\omega_p}\frac{\partial \alpha_p}{\partial X^\mu} = \frac{4\lambda^2}{2\omega_p}\int d\mu_{k_1,k_2} \Big[&\left(\alpha_p\beta_{k_1}\tilde{\beta}_{k_2} - \beta_p\alpha_{k_1}\tilde{\alpha}_{k_2}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-k_1-k_2) \\ &+ \left(\alpha_p\beta_{k_1}\tilde{\alpha}_{k_2} - \beta_p\alpha_{k_1}\tilde{\beta}_{k_2}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p-k_1+k_2) \\ &+ \left(\alpha_p\alpha_{k_1}\tilde{\beta}_{k_2} - \beta_p\beta_{k_1}\tilde{\alpha}_{k_2}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k_1-k_2) \\ &+ \left(\alpha_p\alpha_{k_1}\tilde{\alpha}_{k_2} - \beta_p\beta_{k_1}\tilde{\beta}_{k_2}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k_1+k_2) \Big] \end{aligned} \tag{18.146}$$

となる．ただし，

$$d\mu_{k_1,k_2} = \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{k_1}}\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\Omega_{k_2}} \tag{18.147}$$

である．(18.146) の右辺の第 1 項は $\chi_{k_2}+\phi_{k_1}\to\phi_p$ と $\phi_p\to\chi_{k_2}+\phi_{k_1}$ の遷移確率の差である．第 2 項は $\phi_{k_1}\leftrightarrow\chi_{k_2}+\phi_p$ の遷移確率の差である．また，第 3 項は $\chi_{k_2}\leftrightarrow\phi_{k_1}+\phi_p$ についての同様な量を与える．第 4 項は運動学的な理由からゼロとなる．したがって，式 (18.132) の右辺は実際にボルツマン方程式の標準的な衝突項となることがわかる．平衡状態は衝突項がゼロとなるときに与えられるので，α_p は時間によらない．このとき，(18.146) の形から次の条件式

$$\begin{aligned} &\alpha_p\beta_{k_1}\tilde{\beta}_{k_2} - \beta_p\alpha_{k_1}\tilde{\alpha}_{k_2} = 0, \\ &\alpha_p\beta_{k_1}\tilde{\alpha}_{k_2} - \beta_p\alpha_{k_1}\tilde{\beta}_{k_2} = 0, \\ &\alpha_p\alpha_{k_1}\tilde{\beta}_{k_2} - \beta_p\beta_{k_1}\tilde{\alpha}_{k_2} = 0 \end{aligned} \tag{18.148}$$

が課せられることがわかる．この第 1 式を

$$\frac{\alpha_p}{\beta_p} = \frac{\alpha_{k_1}}{\beta_{k_1}}\frac{\tilde{\alpha}_{k_2}}{\tilde{\beta}_{k_2}} \tag{18.149}$$

と書くと，これは保存則の形になっていることがわかる．つまり，衝突において $\log(\alpha/\beta)$ は加算的な保存量でなければならない．(18.148) のその他の式についても同じ結果が得られる．保存量としてエネルギーを選ぶと，

$$\frac{\alpha_p}{\beta_p} = \exp\left(\frac{\omega_p}{T}\right) \tag{18.150}$$

となる．これは平衡状態の解

$$n_p = \frac{1}{e^{\omega_p/T} - 1} \tag{18.151}$$

を導く．ここでパラメータ T は温度と同定できる．より一般に，保存則には運動量も含まれる．このとき，指数のなかに $\boldsymbol{p}$ に比例する項が現れる．これは，媒質全体のドリフト運動によるものと解釈できる．

ここでの導出から，ボルツマン方程式には適用限界があることがわかる．つまり，ボルツマン方程式は 1 粒子分布関数での近似が有効となる希薄な系に適用される．さらに，このときポテンシャルはゆっくりと変化しなければならない．より一般的な場合には，(18.122) にある $Z[J, \tilde{J}]$ をもちいるか，(18.124) の連立方程式を解析しなければならない．これらの式が実際に気体分子運動論を記述することを示すのが，ここでのボルツマン方程式導出の主な目的であった．

18.11　虚時間形式

これまで，密度行列で与えられる被占数の期待値をもちいて，さまざまな場の有限温度・密度における伝播関数を構成した．時間発展する現象ではなく，平衡状態の性質に興味がある場合は，ある種の計算に非常に便利な別の手法が存在する．これは虚時間をもちいた手法であり，これについて以下で簡単に議論しよう．簡単のため，再度，次の作用をもつスカラー場の理論を考えよう．

$$\mathcal{S} = \int d^4x \, \left[\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \lambda\varphi^4\right]. \tag{18.152}$$

媒質の静止系において密度行列の平衡状態の解は $\rho = Z^{-1}e^{-\beta H}$ で与えられる．分配関数は $Z = \mathrm{Tr}e^{-\beta H}$ である．$e^{-\beta H}$ の因子は時間発展の演算子

e^{-itH} に虚時間間隔 $-i\beta$ を代入した形になっている．以前に導いた経路積分の公式をもちいると，

$$\begin{aligned}\langle\alpha|e^{-itH}|\gamma\rangle &= \int[d\varphi][d\varphi']\,\Psi_\alpha^*(\varphi')\,\Psi_\gamma(\varphi)\,K(\varphi',t,\varphi,0),\\ K(\varphi',t,\varphi,0) &= \langle\varphi'|e^{-itH}|\varphi\rangle \\ &= \int[d\varphi]\,\exp\left(i\int_0^t dt\,d^3x\;\mathcal{L}(t)\right)\end{aligned} \tag{18.153}$$

と書ける．ただし，$\Psi_\alpha(\varphi)=\langle\varphi|\alpha\rangle$ は状態 $|\alpha\rangle$ の波動関数であり，$K(\varphi',t,\varphi,0)$ は $t=0$ での境界値が φ であり t での境界値が φ' であるすべての場についての汎関数積分である．分配関数については，変数 τ $(0\le\tau\le\beta)$ を $t=-i\tau$ として導入する．これより，

$$\begin{aligned}\langle\alpha|e^{-\beta H}|\gamma\rangle &= \int[d\varphi][d\varphi']\,\Psi_\alpha^*(\varphi')\,\Psi_\gamma(\varphi)\,K_\beta(\varphi',\varphi),\\ K_\beta(\varphi',\varphi) &= \int[d\varphi]\,\exp\left(\int_0^\beta d\tau\,d^3x\;\mathcal{L}(t=-i\tau)\right)\\ &= \int[d\varphi]\,\exp\left(-\int_0^\beta d\tau\,d^3x\;\mathcal{L}_E\right)\end{aligned} \tag{18.154}$$

が得られる．ただし，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_E &= -\mathcal{L}(t=-i\tau)\\ &= \frac{1}{2}\left[(\partial_\tau\varphi)^2+(\nabla\varphi)^2+m^2\varphi^2\right]+\lambda\,\varphi^4\end{aligned} \tag{18.155}$$

はユークリッド化された理論のラグランジアンである．$\sum_\alpha \Psi_\alpha(\varphi)\,\Psi_\alpha^*(\varphi')=\delta(\varphi,\varphi')$ であるので，トレースをとる際に，場 φ の τ 方向について周期的境界条件を課さなければならないことがわかる．よって，

$$\begin{aligned}Z &= \int_{\text{周期的}}[d\varphi]\,\exp\left(-\mathcal{S}_E(\beta)\right),\\ \mathcal{S}_E(\beta) &= \int d\tau\,d^3x\;\frac{1}{2}\left[(\partial_\tau\varphi)^2+(\nabla\varphi)^2+m^2\varphi^2\right]+\lambda\,\varphi^4\end{aligned} \tag{18.156}$$

となる．相関関数も同様に

$$\langle\varphi(\tau_1,\boldsymbol{x}_1)\cdots\varphi(\tau_N,\boldsymbol{x}_N)\rangle = Z^{-1}\int[d\varphi]\;e^{-S_E(\beta)}\,\varphi(\tau_1,\boldsymbol{x}_1)\cdots\varphi(\tau_N,\boldsymbol{x}_N) \tag{18.157}$$

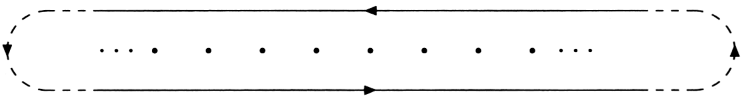


図 18.1　(18.161) の積分に現れる経路.

と定義できる．したがって，平衡状態の理論は $\mathbf{R}^3 \times S^1$ 上のユークリッド理論で定義できる．ただし，S^1 成分は τ 方向についての場の周期性を表す．

虚時間形式の理解を深めるために，ここで必要となる伝播関数を計算してみよう．τ 方向の周期性は振動数が $\omega_n = 2\pi n/\beta = 2\pi nT$ と量子化されることを意味する．これは，松原振動数と呼ばれる．したがって，$(-\Box_E + m^2)$ の逆演算子である伝播関数は

$$G_E(x,y) = T\sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp\left[i\omega_n(\tau_x - \tau_y) + i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right]}{\omega_n^2 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + m^2} \tag{18.158}$$

で与えられる．n についての和は複素積分を使って計算できる．この和は

$$F(\tau) = \sum_n f(n,\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2b^2 + a^2} e^{inb\tau} \tag{18.159}$$

の形で書ける．この関数は任意の整数 m による変換 $b\tau \to b\tau + 2\pi m$ のもとで不変であることに注意しよう．したがって，τ が正のとき，これを $0 < b\tau < 2\pi$ の範囲で評価することができる．この範囲外で正の値をもつ $b\tau$ については，周期性から関数の値を定義することができる．つぎに，関数

$$g(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \tag{18.160}$$

を考えよう．これは $z = n$ に極をもつ．この極のまわりで展開すると，留数は $1/2\pi i$ となる．したがって，(18.159) の和は

$$F(\tau) = \oint_C \frac{1}{(b^2z^2 + a^2)(e^{2\pi i z} - 1)} \exp(ibz\tau) \tag{18.161}$$

と表せる．経路 C は図 18.1 に示されているように，$g(z)$ による極を囲む経路である．$\tau > 0$, $b\tau < 2\pi$ の場合，被積分関数は z の虚部の絶対値が大きいときにゼロとなる．したがって，この経路は図 18.2 のように変形できる．これは，上下半面にある大きな半円がそれぞれ $1/(b^2z^2 + a^2)$ による極の寄与

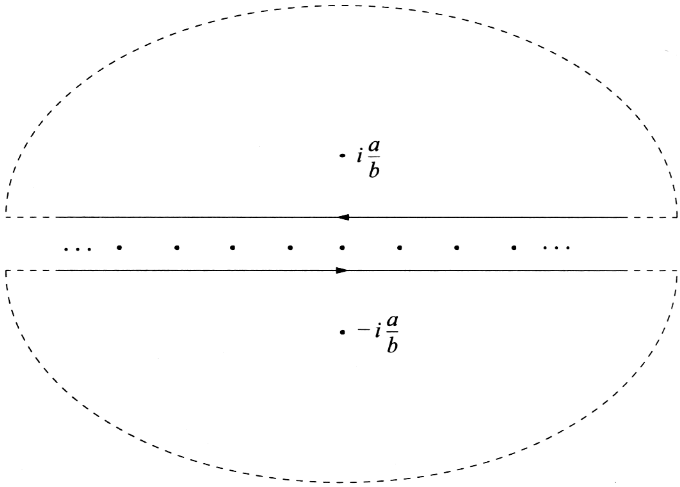


図 18.2　(18.161) を評価するために変形された経路.

を拾う経路である．よって，$F(\tau)$ は

$$F(\tau) = \frac{\pi}{ab}\left[\frac{e^{a\tau}}{e^{2\pi a/b}-1} + e^{-a\tau}\left(1+\frac{1}{e^{2\pi a/b}-1}\right)\right] \tag{18.162}$$

と計算できる．これは $\tau > 0$ のときの積分値である．この結果をもちいて，(18.158) の和を実行し，$\tau = ix^0$ としてミンコフスキー空間に解析接続すると

$$\begin{aligned} G_E(x,y)\Big]_{\tau_x,\tau_y\to ix^0,iy^0} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\Big[(1+n_k)e^{-i\omega_k(x^0-y^0)} \\ &\qquad + n_k e^{i\omega_k(x^0-y^0)}\Big]e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left[(1+n_k)e^{-ik(x-y)} + n_k e^{ik(x-y)}\right] \end{aligned} \tag{18.163}$$

を得る．これを伝播関数 (18.16) と比べると，(18.158) のミンコフスキー空間への接続は確かに正しい熱伝播関数となることがわかる．実際には，この

結果は $\tau_x - \tau_y > 0$ の場合にのみ示された．$\tau_x - \tau_y < 0$ の場合には，次の公式をもちいて和を計算できる．

$$F(\tau) = \oint_C \frac{e^{2\pi iz}}{(b^2z^2+a^2)(e^{2\pi iz}-1)} \exp(ibz\tau). \tag{18.164}$$

これより，経路を 2 つの半円に変形する際の収束性が保証される．このとき，積分は

$$F(\tau) = \frac{\pi}{ab}\left[\frac{e^{-a\tau}}{e^{2\pi a/b}-1} + e^{a\tau}\left(1+\frac{1}{e^{2\pi a/b}-1}\right)\right] \tag{18.165}$$

となる．この結果をもちいて $G_E(x,y)$ の接続を考えると，τ に周期性をもつユークリッド伝播関数の解析接続によって，$\tau_x - \tau_y < 0$ と $\tau_x - \tau_y > 0$ のどちらの場合にも，ミンコフスキー伝播関数 (18.16) が正しく導かれることがわかる．

(18.159) の和は，整数上で定義される関数 $f(n,\tau)$ で表される．公式 (18.161) と (18.164) はこの関数をすべての z の値に解析接続して得られた．このような接続は一意的ではなく，和を経路積分で評価する際に異なる被積分関数をもちいることができる．$\tau > 0$ と $\tau < 0$ の場合，適切な解析接続は，経路を上下の半円に変形した際に，積分が収束するという条件のもとで与えられ，これにより，(18.161) と (18.164) が得られた．

これまではボソン場について議論してきた．フェルミ粒子の場合は，反周期条件

$$\psi(\tau+\beta) = -\psi(\tau) \tag{18.166}$$

をもちいる必要がある．このとき，松原振動数は $\omega_n = 2\pi(n+\frac{1}{2})T$ と書ける．よって，自由フェルミ粒子のユークリッド作用は $S = \int d^4x\, \bar{\psi}(\gamma\cdot\partial + m)\psi$ となり，フェルミ粒子の伝播関数は

$$S(x,y) = T\sum_n \frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{i\gamma\cdot p + m} \tag{18.167}$$

で与えられる．ただし，$p_4 = \omega_n = 2\pi(n+\frac{1}{2})T$ である．和の公式

$$\sum_n f(n+\frac{1}{2},\tau) = \oint \frac{f(z,\tau)}{e^{2\pi iz}+1} \tag{18.168}$$

をもちいると，この伝播関数のミンコフスキー空間への接続は，熱伝播関数

(18.22), (18.23) を正しく再現していることが確認できる．(18.168) の右辺の分母は $z = n + \frac{1}{2}$ に極をもつ．したがって，この項の構造は場の反周期性によって指定される．よって，これは $1/(e^{\omega/T} + 1)$ の因子をもち，フェルミ粒子の熱分布を正しく表している．本質的には，これが反周期条件 (18.166) がフェルミオンに対する正しい処方であることの理由である．観測量はフェルミオンの双線形な演算子で表されるので，観測量が周期性をもつことはフェルミオン場の反周期性と矛盾しないことに注意しよう．

フェルミオンとボソンのこれまでの議論をまとめると，有限温度における一般的な場の理論の汎関数積分は

$$Z = \int_{P/AP} d\mu(\varphi, \psi, \bar{\psi}, A, \ldots)\ \exp\Big[- S_E(\varphi, \psi, \bar{\psi}, A, \ldots) + \int J\varphi + \bar{\eta}\psi + \cdots \Big] \tag{18.169}$$

で与えられる．ここで，積分記号の添え字 P/AP は，虚時間方向に対してボソン場については周期的 (P)，フェルミオン場については反周期的 (AP) な積分を行うことを示す．ただし，それぞれの周期は $\beta = 1/T$ で与えられる．Z をさまざまなソース関数で適当な数だけ汎関数微分し，ソース関数をゼロにすると，温度に依存した相関関数を求められる．$J = \bar{\eta} = \cdots = 0$ のとき，Z は熱分配関数である．ゲージ場については，注意が必要な性質がある．ゴースト場は互いに反交換関係を満たすが，これらは $\tau \to \tau + \beta$ のもとで周期的でなければならない．これは，ゴーストが，結局のところ，ファデーエフ–ポポフ行列式の書き換えによって現れる場にすぎないためである．この行列式はボソン場つまりゲージ場に対するものであり，周期条件をみたすモードで計算される．この結果は行列式のいかなる書き換えによっても変わらないので，ゴースト場は τ について周期的でなければならない．

虚時間形式をもちいると明らかなもう 1 つの特徴が高温極限での次元縮小 (dimensional reduction) である．温度 T が上がると，ボソンの $n = 0$ モードを除いて，松原振動数は大きくなる．また，伝播関数のモード和においては，ボソンの $n = 0$ モードを除いた各項の値が小さくなる．したがって，T が非常に大きくなると，ゼロモードの松原振動数のみが重要になる．このモードは虚時間 τ に依存しない．よって，積分から出てくる β の因子を別にする

と，理論は 3 次元理論となる．つまり，高温極限をとると 1 次元低いボソン場の理論で与えられる．この考え方は有用であるが，赤外発散のない場合にのみ適用できることに注意しよう．赤外発散がある場合は，このような次元縮小を行う前に，再和 (resummation) などの処方をもちいて赤外発散を取り扱わなければならない．

実時間の観点からは，次元縮小は次のように理解できる．媒質に摂動が導入されると，それにより非平衡状態が生じ，媒質は，媒質固有の平衡時間のあいだに，衝突その他の物理過程によって平衡状態に戻る．温度を上げると，この平衡時間は短縮される．したがって，漸近的に，高温極限では平衡に戻る時間が非常に短いため，時間に依存する物理過程はすべて無視できる．これが次元が減ることの実際的な理由である．

18.12　高温での対称性の回復

すでに見たように，スカラー粒子の質量は温度に依存する補正を受ける．自発的対称性の破れが起きる理論では，有効作用が温度による補正を受けて，高温で対称性を保つ基底状態がエネルギー的に低くなることがある．このとき，高温では対称性が回復され，低温では自発的対称性の破れが起こる．このとき，理論は対称性を保つ高温相と対称性の破れる低温相の 2 つの相で実現され，ある臨界温度 T_c で相転移が起きる．この簡単な例として，N 個のスカラー場 ϕ^i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ の $O(N)$ 模型を考えよう．この模型のユークリッド作用は

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_E &= \int d^4x \ \left[\frac{1}{2}\partial\phi^i\partial\phi^i + \lambda(\phi^i\phi^i - v^2)^2\right] \\ &= \int d^4x \ \left[\frac{1}{2}\partial\phi^i\partial\phi^i - \frac{1}{2}(4\lambda v^2)\phi^i\phi^i + \lambda(\phi^i\phi^i)^2 + (\text{定数})\right] \qquad (18.170)\end{aligned}$$

で与えられる．λ についての 1 次のオーダーで質量補正は

$$\begin{aligned}\delta m^2 &= 4\lambda(N+2)G_0(x,x) \\ &\approx \lambda\frac{(N+2)}{3}T^2 \qquad (18.171)\end{aligned}$$

で与えられる．ここで，$G_0(x, y)$ は自由場の理論の熱伝播関数であり，上式

2 行目では温度に依存する補正のみを示した.（T によらない部分は通常の繰り込みの手続きによって，質量の定義に吸収される.）この補正を含めると，有効作用のなかで ϕ について 2 次の項は $\Gamma^{(2)}=\frac{1}{2}M^2\phi^i\phi^i$ となる．ただし，

$$\begin{aligned} M^2 &= -4\lambda v^2 + 4\lambda(N+2)G_0(x,x) \\ &= -4\lambda\left(v^2 - \frac{(N+2)}{12}T^2\right) \end{aligned} \tag{18.172}$$

である．これは相転移が

$$T_c = \sqrt{\frac{12}{N+2}}\,v \tag{18.173}$$

で起きることを示している．このとき，$\langle\phi^i\rangle \neq 0$ となる対称性の破れた相は $T<T_c$ でエネルギー的に優位となり，また $\langle\phi^i\rangle=0$ となる対称的な相は $T>T_c$ でエネルギー的に優位となる．

この簡単な計算から，低温から高温へ移ると，$T<T_c$ で $\langle\phi\rangle\neq 0, T>T_c$ で $\langle\phi\rangle=0$ となる相転移が現れることがわかる．しかし，相転移の詳細を調べるには，1 次の摂動論では不十分である．転移点の付近では高次のオーダーの補正が重要となる．これは有効質量 M が転移点でゼロとなり，さまざまなダイヤグラムの寄与が赤外発散を導くためである．これらの寄与は，$M\to 0$ で特異点をもつ．そのため，これらを無視する正当性はない．摂動展開に際して項の再和をとる必要がある．シュウィンガー–ダイソン方程式はこの問題を扱う 1 つの手段を与える．

虚時間形式において，運動方程式と汎関数積分の形は温度がゼロとなっても同じであった．唯一の違いは，これらが $\mathbf{R}^4$ ではなく $\mathbf{R}^3\times S^1$ 上で定義されていることであり，これは虚時間方向に対して場が周期性をもつためであった．よって，シュウィンガー–ダイソン方程式は

$$\int d^4x_2\,[K(1,2)+\Sigma(1,2)]\,G(2,3) = \delta^{(4)}(x_1-x_3) \tag{18.174}$$

と書ける．ただし，$K=(-\Box-4\lambda v^2)$ であり，

$$\Sigma(1,2) = 4\lambda(N+2)G(1,1)\delta^{(4)}(x_1-x_2)+\cdots \tag{18.175}$$

である．ここで，$G(1,2)$ は完全な伝播関数である．(8.108) 以降で議論したように，Σ の高次の項は $\sim\lambda^2G(1,2)^3+\cdots$ と書ける．有効質量を一定とし

て，式 (18.174), (18.175) をもちいると，

$$M^2 = -4\lambda v^2 + 4\lambda(N+2)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\omega_k}\frac{1}{e^{\omega_k/T}-1} \tag{18.176}$$

となる．ただし，$\omega_k^2 = k^2 + M^2$ である．これは（エネルギーギャップ M についての）ギャップ方程式の形になっている．この式を T の関数として M について解くと，T_c 付近での近似を改良できる．そこで，$\mu = M/T$ として，

$$\mathcal{I}(\mu) = \frac{6}{\pi^2}\int_0^\infty dx\,\frac{x^2}{\sqrt{x^2+\mu^2}}\,\frac{1}{\exp(\sqrt{x^2+\mu^2})-1} \tag{18.177}$$

を定義しよう．これは μ が $\alpha = m/T$ となっている点を除けば，(18.18) と同じ積分である．(18.177) の比例定数は $\mathcal{I}(0) = 1$ となるようにとられている．これより，ギャップ方程式は

$$\mu^2 = \lambda\frac{(N+2)}{3}\left(\mathcal{I}(\mu) - \frac{T_c^2}{T^2}\right) \tag{18.178}$$

と書ける．これは高温側から T_c に近づいて μ がゼロとなる場合に矛盾なく定義されることに注意しよう．したがって，臨界温度はこのオーダーの再和においても (18.173) で与えられる．この計算は高温側から転移点へ近づく場合に有効である．T_c より温度が低い場合は，対称性の破れが起こるため，南部–ゴールドストン・ボソンと質量のあるスカラー場をもちいて計算しなければならない．

Σ を $4\lambda(N+2)G(1,1)\delta^{(4)}(x_1-x_2)$ とする近似のもとで，シュウィンガー–ダイソン方程式による再和がとられた項は図 18.3 で示されている．ここで，1 行目のファインマン図は「デイジー (daisy)」ダイヤグラム，また 2 行目の図は「スーパーデイジー (superdaisy)」ダイヤグラムと呼ばれる[1]．

Σ に $\lambda^2 G^3(1,2)$ 項などの補正がさらに追加されると，図 18.3 で示された図に加えて一連の新しいファインマン図が生成される．摂動論におけるさまざまな種類の高次のオーダーの補正は，N が大きい（ラージ N）極限で，N のベキ数で分類される．これまで考えてきた Σ の項つまり (18.175) は λN のオーダーである．Σ の次の項は

$$\Sigma^{(2)}(1,2) = -\frac{32(3N+6)}{3}\lambda^2 G^3(1,2) \tag{18.179}$$

[1] ［訳註］daisy はヒナギクの花のことである．

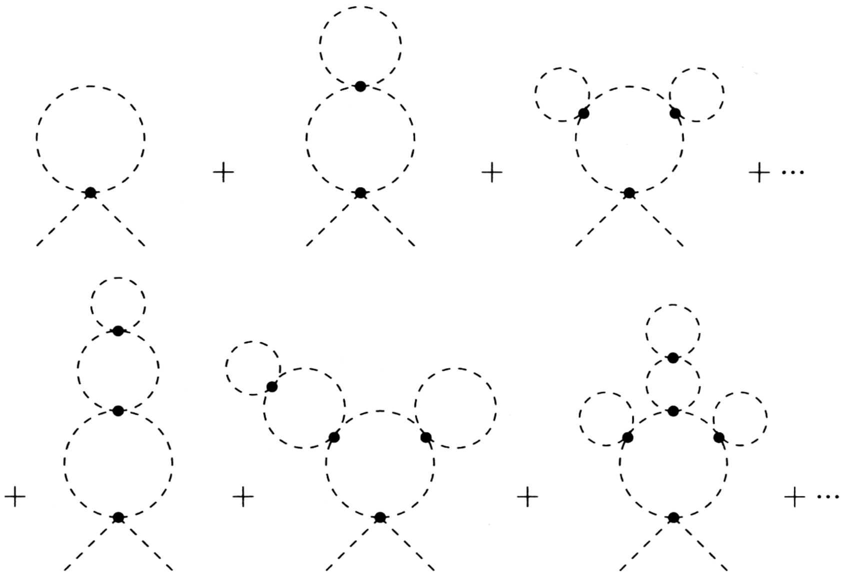


図 18.3 デイジー・ダイヤグラムとスーパーデイジー・ダイヤグラム

で与えられる．この項は $\lambda^2 N$ のオーダーである．λN を一定に保ったまま，N が大きく，λ が小さくなる極限をとり，摂動展開を N の逆ベキについて昇順に並べかえることで摂動論の部分再和を定義しよう．Σ の公式 (18.175) とそれにより生成される「デイジー」,「スーパーデイジー」ダイヤグラムはこの展開の主要項を与える．これに次ぐ補正 (18.179) は，より低い $1/N$ のオーダーで与えられる．ラージ N 展開では，(18.175) をもちいた再和は近似を含まない．また，ギャップ方程式から有効質量が転移点でゼロとなることがわかる．実際，$\mathcal{I}(\mu)$ の微分をとり，これを小さい μ で評価して積分すると，

$$\mathcal{I}(\mu) \approx 1 - \frac{3}{\pi}\mu + \cdots \tag{18.180}$$

となる．このとき，ギャップ方程式 (18.178) は T_c の近傍で

$$M \approx \frac{2\pi}{3}(T - T_c) \tag{18.181}$$

と解ける．これは，高温側から転移温度に近づくと M が温度の 1 次で消滅す

ることを示している．有効質量がゼロなので，転移点では無質量の励起（長波長の励起）が起きる．したがって，熱力学的な視点で考えると，この相転移は少なくとも 2 次のオーダーの相転移である．

N が有限の場合，上の計算から相転移の特性を明らかにすることはできない．これは Σ への (18.179) の寄与やより高次の補正を高次の寄与とみなせないためである．つまり，これらは無視できない効果となる．よって，この場合はより込み入った非摂動的な手法が必要となる．

18.13　標準模型における対称性の回復

標準模型では，対称性の自発的な破れはヒッグス機構によって起こり，これにより $W^{\pm}$ 粒子と Z 粒子に質量が与えられる．この対称性は，$O(N)$ 模型の場合と同じように，高温で回復される．いまの場合，スカラー粒子に加えてゲージ粒子とフェルミ粒子があり，転移の詳細は以前とはいくぶん異なる．この効果については，温度がゼロの場合に行ったように，有効ポテンシャルをもちいた計算で議論できる．背景にあるヒッグス場 ϕ が任意（であるが一定）の値をもつとき，ゲージ粒子の質量は $M_Z^2 = \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)\phi^\dagger\phi$, $M_W^2 = \frac{1}{2}g^2\phi^\dagger\phi$ で与えられる．よって，これらの自由エネルギーへの寄与は ϕ とともに変化し，このエネルギーが有効ポテンシャルとなる．虚時間形式では，スカラー粒子 1 つに対して

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log(k^2 + s) \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, T\sum_n \log(\omega_n^2 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + s)\end{aligned} \tag{18.182}$$

と書ける．ここで，s はヒッグス場を背景にもつ場の質量の 2 乗で最終的に表される．s についての微分をとると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Gamma}{\partial s} &= \frac{1}{2}\int d^4x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, T\sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + s} \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + s}}\left(n_k + \frac{1}{2}\right),\end{aligned} \tag{18.183}$$

$$n_k = \frac{1}{\exp\left(\beta\sqrt{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}+s}\right)-1}$$

を得る．これを s について積分すると

$$\Gamma(m^2) = \int d^4x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\frac{1}{2}\omega_k + T\log\left(1-e^{-\beta\omega_k}\right)\right] + (\text{定数}) \quad (18.184)$$

となる．ここで,「定数」は m^2 と $\omega_k = \sqrt{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}+m^2}$ によらない項を表す．右辺の第 1 項はゼロ点エネルギーであり，8 章でみたようにこれは 1 ループの有効ポテンシャルを導く．この項はカットオフをもちいて計算されなければならず，関連するラグランジアンのパラメータは繰り込まれなければならない．ここでは温度に依存する第 2 項に興味がある．そこで，これを Γ_T と表そう．(18.183) から，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_T}{\partial s} &= \frac{1}{2}\int d^4x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}+s}}\,n_k \\ &= \frac{T^2}{24}\int d^4x\ \mathcal{I}(\beta\sqrt{s})\end{aligned} \quad (18.185)$$

と表せる．(18.180) と同じように，$\mathcal{I}(\beta\sqrt{s})$ を小さい $\beta\sqrt{s}$ で評価すると，

$$\Gamma_T = (\text{定数}) + \frac{T^2m^2}{24} - \frac{Tm^3}{12\pi} + \cdots \quad (18.186)$$

を得る．これはそれぞれのボソンの各偏極状態に対する寄与である．したがって，W ボソンと Z ボソンからの寄与は，

$$\Gamma_T = 8\,(\text{定数}) + \frac{T^2}{24}(3M_Z^2 + 6M_W^2) - \frac{T}{12\pi}(3M_Z^3 + 6M_W^3) + \cdots \quad (18.187)$$

となる．前出の M_Z と M_W の値を代入すると，このオーダーの計算での有効ポテンシャルは

$$\begin{aligned}\Gamma &= \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 - \alpha(T)\phi^\dagger\phi - \gamma(T)(\phi^\dagger\phi)^{\frac{3}{2}} + \cdots, \\ \alpha(T) &= \lambda v^2 - \frac{T^2}{24}\left(\frac{9}{2}g^2 + \frac{3}{2}g'^2\right), \\ \gamma(T) &= \frac{T}{12\pi}\left[3\left(\frac{g^2+g'^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + 6\left(\frac{g^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\end{aligned} \quad (18.188)$$

と書ける．$\alpha(T)$ はある温度 T_c で符号を変える．この温度は $\alpha(T_c) = 0$ で定義され，$T < T_c$ で $\alpha > 0$, $T > T_c$ で $\alpha < 0$ となる．3 次の項 $\gamma(\phi^\dagger\phi)^{\frac{3}{2}}$ は，

相転移の性質を決めるに当たり非常に重要である．ここでの議論に無関係な定数項を無視すると，$\phi = 0$ で $\Gamma = 0$ となることがわかる．ϕ を増加させると，ϕ が小さいとき，$\alpha\phi^\dagger\phi$ が主要な項となり，($\alpha > 0$ で) Γ は減少する．さらに ϕ を増加させると，$\gamma(\phi^\dagger\phi)^{\frac{3}{2}}$ の項により Γ はさらに減少する．最終的には，$\lambda(\phi^\dagger\phi)^2$ の項が支配的となり Γ は増加する．したがって，$\alpha > 0$ の場合，ϕ がゼロでない値

$$\langle\phi\rangle = \frac{\sqrt{32\lambda\alpha + 9\gamma^2} + 3\gamma}{8\lambda} \tag{18.189}$$

をとるとき Γ は極小となる．これは低温での対称性の破れを与える．$\alpha = 0$ の場合も，ϕ をゼロから増加させると Γ は一旦減少してから増加するので，ϕ がゼロでない値に極小をもつ．よって，この場合も対称性の破れが起こる．$\alpha < 0$ の場合，Γ はまず ϕ とともに増加してから，$\gamma(\phi^\dagger\phi)^{\frac{3}{2}}$ 項によって一度減少し，さらに $\lambda(\phi^\dagger\phi)^2$ 項により増加する．よって，この場合 $\phi = 0$ と (18.189) の $\phi = \langle\phi\rangle$ に 2 つの極小が現れる．$|\alpha|$ が小さいとき，$\langle\phi\rangle$ は大域的な極小のままであるが，$|\alpha|$ が大きいときは，$\phi = 0$ が大域的な極小となる．この 2 つの極小の間には図 18.4 に示したようにポテンシャルの障壁が存在する．この障壁のため，$\phi = \langle\phi\rangle$ から $\phi = 0$ の極小への遷移はいずれも量子トンネル効果によって引き起こされる．

つぎに，系の初期状態が対称性の破れた低温側の相にあると仮定しよう．系が熱せられると，最終的には $\phi = 0$ が大域的な極小となる．しかし，系そのものは $\langle\phi\rangle$ の局所的な極小にとどまり，対称性は破れたままである．これは準安定な (metastable) 状態である．この状態は，やがてはトンネル効果により，$\phi = 0$ となる対称的な相へ遷移する．系の温度をさらに上げると，ポテンシャル障壁は小さくなりトンネル効果がより起きやすくなる．ここでの議論は 1 次相転移に典型的なものである．$\langle\phi\rangle$ にある局所的な準安定な極小値と $\phi = 0$ にある大域的な極小値とのエネルギー準位差は相転移の潜熱である．したがって，ここでもちいた 1 ループ近似では，温度を十分に高い値にまで上げると，標準模型は対称相へ 1 次の相転移を起こすことがわかる．

ここでは有効ポテンシャルに対するゲージボソンの寄与を考えたが，より包括的な解析には，1 ループ近似の範囲内であっても，ヒッグス粒子とフェルミオンの寄与が必要となる．さらに，相転移の動力学について満足のいく

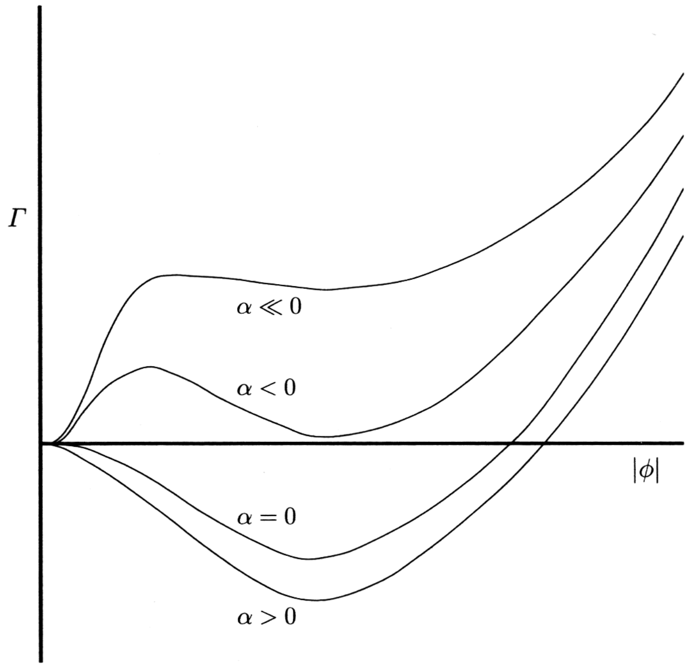


図 18.4　異なる α の値に対する有効ポテンシャル.

記述を得るには，$O(N)$ 模型の場合と同様に，転移点付近での高次の補正を含めなければならない.

参考文献

1. 本章の内容については，次の教科書が参考になる．M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press (2000); A. Das, *Finite Temperature Field Theory*, World Scientific Pub. Co. (1997); J.I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory*, Cambridge University Press (1994).

2. 密度行列についての一般的な文献としては，R.P. Feynman, *Statistical Mechanics*, Addison-Wesley Pub. Co. (1972) がある.

3. 久保–マーティン–シュウィンガー条件は R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **12**,

570 (1957); P.C. Martin and J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 1342 (1959) による．

4. 静電場の遮蔽効果については 1920 年代のデバイ (P. Debye) による電解質の研究にさかのぼる．光子の熱伝播関数をもちいた計算は次の文献による．V.P. Silin, Sov. J. Phys. JETP **11**, 1136 (1960); V.N. Tsytovich, Sov. Phys. JETP, **13**, 1249(1961); O.K. Kalashnikov and V.V. Klimov, Sov. J. Nucl. Phys., **31**, 699 (1980); V.V. Klimov, Sov. J. Nucl. Phys. **33**, 934 (1981); Sov. Phys. JETP **55**, 199 (1982); H.A. Weldon, Phys. Rev. **D26**, 1394 (1982).

5. 硬熱ループをもちいた非アーベル型ゲージ場の遮蔽効果の計算は次の文献による．R. Pisarski, Physica **A158**, 246 (1989); Phys. Rev. Lett. **63**, 1129 (1989); E. Braaten and R. Pisarski, Phys. Rev. **D42**, 2156 (1990); Nucl. Phys. **B337**, 569 (1990); *ibid.* **B339**, 310 (1990); Phys. Rev. **D45**, 1827 (1992).

6. 遮蔽効果に対する有効作用の計算は次の文献でも与えられている．J. Frenkel and J.C. Taylor, Nucl. Phys. **B334**, 199 (1990); J.C. Taylor and S.M.H. Wong, Nucl. Phys. **B346**, 115 (1990); R. Efraty and V.P. Nair, Phys. Rev. Lett. **68**, 2891 (1992); Phys. Rev. **D47**, 5601 (1993). 本章の議論は最後の文献に従った．

7. 古典的な輸送方程式をもちいた硬熱ループの導出は P.F. Kelly *et al.*, Phys. Rev. Lett. **72**, 3461 (1994); Phys. Rev. **D50**, 4209 (1994) で与えられた．

8. アーベル型の久保公式は，参考文献 3 の最初の論文で与えられている．

9. Γ の虚部についての計算は R. Jackiw and V.P. Nair, Phys. Rev. **D48**, 4991 (1993) に従った．また，これに関連する研究として，J.P. Blaizot and E. Iancu, Nucl. Phys. **B390**, 589 (1993); Phys. Rev. Lett. **70**, 3376 (1993) がある．

10. 高密度における遮蔽現象については C. Manuel, Phys. Rev. **D53**, 5866 (1996); G. Alexanian and V.P. Nair, Phys. Lett. **B390**, 370 (1997) を参照されたい．

11. ゲージ場の遮蔽効果についての最近のレビューとして，U. Kraemmer and A. Rebhan, Rep. Prog. Phys. **67**, 351 (2004) がある．

12. 時間経路の手法は次の文献による．J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961); P.M. Bakshi and K. Mahanthappa, J. Math. Phys. **4**, 1 (1963); *ibid.* **4**, 12 (1963); L.V. Keldysh, Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1964).

13. カダノフ–ベイム方程式は L.P. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, W.A. Benjamin, Inc. (1962) で与えられている．

14. 量子的な気体分子運動論についての一般的な文献は S.R. De Groot, W.A. van Leeuwen and Ch.G. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory*, North-Holland/ Elsevier (1980) である．

15. 虚時間をもちいたグリーン関数は T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955) で導入された．

16. 相対論的な場の理論における虚時間形式は D.A. Kirzhnits and A.D. Linde,

Phys. Lett. **B42**, 471 (1972); Ann. Phys. **101**, 195 (1976); L. Dolan and R. Jackiw, Phys. Rev. **D9**, 3320 (1974); S. Weinberg, Phys. Rev. **D9**, 3357 (1974) でもちいられた．これらの論文では，高温での対称性の回復も議論されている．

17. ゴーストが周期的境界条件に従うことを初めて述べた論文は C. Bernard, Phys. Rev. **D9**, 3312 (1974) である．

18. 標準模型および N が小さいときの $O(N)$ 模型における相転移のオーダーについての理解はまだ完全に満足できるものではない．これに関するレビューとしては，P. Arnold, Lecture at *Quarks '94*, Russia, 1994, `http://arXiv.org/hep-ph/9410294` を参照されたい．

第19章

ゲージ理論 —— 非摂動的なアプローチ

19.1　クォークの閉じ込めと双対超伝導

19.1.1　閉じ込めの一般的な描像

ヤン–ミルズ理論の摂動的な側面については10章ですでに見た．ゲージ理論は物理的には標準模型として実現されるので，その摂動計算のほとんどは標準模型に関するものである．電弱理論については，輻射補正を含むさまざまな散乱過程の摂動計算がなされ，それらは実験データで確認されている．また，強い相互作用の $SU(3)$ ゲージ理論ではゲージ対称性が保存され，10章で行った有効電荷と漸近的自由性についての議論から，この場合の摂動計算も，高エネルギーにおいて，信頼できることがわかる．これ以外にも，非常に多くの散乱過程が高エネルギーで解析され，実験データと比較されている．これらすべての計算から，標準模型は，摂動計算が信頼できる運動領域の全域において，実験と非常によく一致することが基本的な結論として導かれる．しかし，摂動的な解析が十分でない場合も多くある．そのうち最も注目に値し，物理的に面白い例は，量子色力学 (QCD) の低エネルギー極限である．これまで，この理論の非摂動領域について，ある程度の定性的な理解は得られているが，定量的な問いに答えることはほとんどできていない．この章では，このような非摂動的な問題に対するアプローチについて議論しよう．

フェルミオンあるいは物質スカラー場をわずかに含むヤン–ミルズ理論においても，理論の対称性が保たれていれば，その漸近的自由性は保たれる．こ

れは，運動量の低い領域に行くにつれ，理論の有効結合定数が増加することを意味している．走る結合定数の公式で与えられる Λ パラメータは理論の基本的なスケールを定義する．つまり，Λ よりも十分に大きい運動量をもつ場は摂動的に扱えるが，Λ と同等かそれよりも小さいすべての運動量モードは非摂動的に扱われなければならない．漸近的自由性についての摂動公式は Λ の付近ではもはや成り立たないので，この理論では，運動量の小さいときに有効結合定数が大きくなる傾向にあるとだけ言える．よって，一般的に期待される描像は，粒子間距離が増えると粒子間のポテンシャルエネルギーが増え，そのため，群のすべての表現（ただし電荷がゼロとなる恒等表現を除く）に属する粒子はいずれも閉じ込められるというものである．この閉じ込め仮説は次のように述べることもできる．

> ゲージ群が G の非アーベル型ヤン–ミルズ理論の漸近状態はすべて G の1重項状態（恒等表現）である．特に，QCD では，クォークは漸近状態として現れない．つまり，クォークはカラー1重項となる組み合わせの構成要素でしかなく，その他の構成要素から自由に引き離すことはできない．

ゲージポテンシャルの変換は $A \to A^g = gAg^{-1} - dgg^{-1}$ で与えられることを思い出そう．ただし，$g(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{R}^3 \to G$ であり，g は空間の無限遠で一定となる．これらの変換のうち空間の無限遠で恒等変換となるものが真のゲージ変換を与える.（そのような変換の集合は以前に $\mathcal{G}_*$ で表した.）これらは物理状態に恒等変換として作用する．g が無限遠で必ずしも1でない定数となる変換は，集合 $\mathcal{G}$ を成す．このとき，以前議論したように $\mathcal{G}/\mathcal{G}_* = G$（$G$ は g を要素とするリー群）となる．恒等変換とは限らないが無限遠で一定となる変換が G 変換と同じである．つまり，これらの変換はネーター対称性として作用し，状態は G の表現で分類される．自明でない表現は，この理論の荷電状態に対応する．このような運動学的 (kinematical) な議論をする限り，荷電状態は問題なく存在する．したがって，閉じ込めの機構は力学的 (dynamical)

な起源をもつ[1].

クォークが閉じ込められているとすると，その次の疑問は当然クォーク間のポテンシャルになる．チャーモニウムやウプシロンなどの重いクォークの束縛状態についての研究から，クォーク間のポテンシャルは，少なくともこれらの重いクォークでは，距離に比例して増加することがわかっている．すなわち，$V(r) = \sigma r$ となる．このように線形に増加するポテンシャルは，クォーク間の色電荷 (chromoelectric) フラックスが有限の張力をもつ細長いチューブ状のフラックスで書けることを意味する．よって，チューブのエネルギー（これは互いに離れたクォーク・反クォーク対(つい)のエネルギーである）はチューブの長さ r に比例する．色電荷を帯びた電気力線がクォーク・反クォーク対を結合している描像である．つぎに，このようなフラックスの配位が物理的にどう実現されているか考えてみよう．超伝導の理論では，マイスナー効果により超伝導領域で磁場が排除される．第 2 種超伝導体では，コヒーレンス長が磁場についてのロンドンの侵入長よりも短くなるので，超伝導性を完全に破ることなく，磁場が超伝導体を貫通することができる．この場合，磁場は超伝導体によって（エネルギー極小化で制限される範囲内で）最小の断面積になるまで押しつぶされ，その結果，細長いチューブ状の磁束が現れる．これはアブリコソフ渦糸 (Abrikosov vortex) であり，単位長さ当たり一定のエネルギーをもつ．このような渦糸の全磁束は量子化されなければならず，その値は（磁束の両端にある）モノポール（磁気単極子）と反モノポールを結んだときの磁束と考えることができる[2]．したがって，第 2 種超伝導体内のモノポール・反モノポール対の相互作用エネルギーは，もしそのような対が物理的に可能であれば，2 粒子間の距離に比例していることがわかる．この状況はクォーク・反クォーク対の場合と非常に似ている．唯一の違いは，クォークの場合は磁荷ではなく電気的なチャージ（色電荷）をもつ点にある．モノ

---

[1] ［訳註］ラグランジアンや系の対称性だけで議論できる問題を kinematical と呼び，場の理論という多体系の量子力学的な運動方程式を解いて理解できる現象を dynamical と呼ぶ．あまり適切な訳語がないが，ここでは前者を運動学的，後者を力学的と訳している．ダイナミカルな現象の代表的な例がクォークの閉じ込めである．

[2] ［訳註］14 章でみたようにモノポール電荷は量子化される．これと渦糸の量子化が関係している．ただし，超伝導体では 2 つの素電荷をもつクーパー対が凝縮しているので，量子化条件は 2 倍異なる．

ポールの真空凝縮による磁気的な超伝導を考えると，電気力線（電束線）が絞り込まれ，電荷間にチューブ状の電束が形成されると予想される．したがって，色電荷をもつ重い粒子の間に距離に比例して増大するポテンシャルが生じてクォークが閉じ込められるという現象は，QCD（あるいは対称性が保存されるヤン–ミルズ理論で，物質場の数が少ない理論一般）の真空状態が色磁荷 (chromomagnetic charge) の凝縮によって，色磁気的な意味での超伝導体になっていると考えれば理解できる．

通常の超伝導体では，秩序パラメータとして振る舞う場を定義できる．これはクーパー対，つまり電子のペアを表す有効場 ϕ である．ϕ は電荷 $2e$ をもち，電磁場と結合する．$T < T_c$ のとき，基底状態での期待値は $\langle\phi\rangle \neq 0$ となり，超伝導状態に対応している．また，$T > T_c$ のときは $\langle\phi\rangle = 0$ となり，常伝導状態に対応している．よって，超伝導現象はランダウ–ギンツブルク (Landau–Ginzburg) 模型（これは非相対論的なアーベル型ヒッグス模型である）において自発的対称性の破れを引き起こすヒッグス現象で表される．これをヤン–ミルズ理論に適用すると，問題となるのは次のような疑問である．どうすれば色電荷ではなく色磁荷による超伝導体という双対な描像が得られるのか？ 秩序パラメータの場に対応するものを見出すことはできるのだろうか？ どうすれば渦糸を得ることができるのか？ そして，真空状態をどう特徴づけたらよいのか？ こういった疑問に答える必要がある．そこで，以下では，重いクォーク間のポテンシャルをウィルソン・ループ演算子と関係づけることから始めよう．

19.1.2　ウィルソン・ループの面積則

まず，平行移動の演算子を次のように定義しよう．

$$U^{ab}(x,y,A) = \left[P\exp\left(-\int_{yC}^{x} A_\mu dx^\mu\right)\right]^{ab}. \tag{19.1}$$

これはゲージ変換 $A \to A^g$ のもとで

$$U^{ab}(x,y,A^g) = \left[g(x)\,P\exp\left(-\int_{yC}^{x} A_\mu dx^\mu\right)g^{-1}(y)\right]^{ab}$$

$$= \left[g(x)U(x,y,A)g^{-1}(y)\right]^{ab} \tag{19.2}$$

と変換する．10 章で議論したように，ウィルソン・ループ演算子は

$$W_R(C) = \mathrm{Tr}\left[P\exp\left(-\oint_{x\ C}^{x} A_\mu dx^\mu\right)\right] = \mathrm{Tr}\,U(x,x,A,C) \tag{19.3}$$

で与えられる．ただし，積分は始点・終点が x である閉曲線 C に沿って実行される．変換則 (19.2) から $W_R(C)$ はゲージ不変であることがわかる．添え字の R は $A_\mu = -it^a A_\mu^a$ が群 G の表現 R に属すことを示している．

この演算子を粒子・反粒子対(つい)のエネルギーと関係づけるために，まずユークリッド時空間における次の物理過程を考えよう．すなわち，静的で重い粒子・反粒子対がある時刻 x^0 に生成され，時刻 x^0+T まで伝播したのちに消滅する過程である．空間的に r だけ離れた粒子・反粒子の対を生成するゲージ不変な演算子は

$$F^\dagger(x^0,x^1,x^1+r) = \phi^{\dagger a}(x)\,U^{ab}(x,y)\,\chi^{\dagger b}(y) \tag{19.4}$$

で与えられる．ここで，$x=(x^0,x^1)$, $y=(x^0,x^1+r)$ である．簡単のため，ここではペアの粒子間距離を x^1 方向に沿ってとった．$\phi^\dagger$ と $\chi^\dagger$ はそれぞれ静的で重い粒子と反粒子の生成演算子を表す．ゲージ変換のもとで $\phi\to g\phi$, $\chi\to g^*\chi$ なので，$F^\dagger$ はゲージ不変である． 質量を十分大きくとれる重粒子の作用は

$$\mathcal{S}(\phi,\chi) = \int d^4x\ \left[i\phi^\dagger D_0\phi + i\chi^\dagger D_0\chi\right] \tag{19.5}$$

で与えられる．ここで，$D_0\phi = \partial_t\phi + A_0\phi$ と $D_0\chi = \partial_t + A_0^*\chi$ はそれぞれ ϕ と χ についての共変微分である．

これらの物質場 ϕ,χ を含んだヤン–ミルズ理論でゲージ固定が $A_0=0$ のものを考えよう．この理論に対応するハミルトニアンを H としよう．(19.5) の A_0 に依存する項はゼロとなるが，これはガウス則によって H に寄与する．このとき，

$$\langle 0|F\,e^{-HT}F^\dagger|0\rangle \approx \mathcal{N}\,e^{-E(r)T} \tag{19.6}$$

と書ける．ここで，$\mathcal{N}$ は F の規格化に関する因子であり，$E(r)$ はペアのエネルギーである．ここでは T が大きいときについて考えよう．T が大きくな

ると，$F^\dagger$ で生成される最低エネルギー状態のエネルギーを得る．粒子は重く静的であるので，$E(r)$ はゲージ場による粒子対の相互作用エネルギーにすぎない．(19.6) をユークリッド化された汎関数積分

$$\langle 0|F\,e^{-HT}F^\dagger|0\rangle = \int d\mu(A,\phi,\chi)\exp\left[-\mathcal{S}_E(A,\phi,\chi)\right] \times \chi^c(y')U^{cd}(y',x')\phi^d(x')\,\phi^{\dagger a}(x)U^{ab}(x,y)\chi^{\dagger b}(y) \tag{19.7}$$

として書き換えることができる．ただし，$x' = (x^0+T, x^1)$，$y' = (x^0 + T, x^1 + r)$ である．ϕ と χ のユークリッド作用は

$$\mathcal{S}_E(\phi,\chi) = \int d^4x\ \left[\phi^\dagger\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \chi^\dagger\frac{\partial\chi}{\partial\tau}\right] \tag{19.8}$$

で与えられ，その伝播関数は

$$\begin{aligned}\langle\phi^a(x)\phi^{\dagger b}(x')\rangle &= \delta^{ab}\theta(\tau-\tau')\delta^{(3)}(x-y),\\ \langle\chi^a(x)\chi^{\dagger b}(x')\rangle &= \delta^{ab}\theta(\tau-\tau')\delta^{(3)}(x-y)\end{aligned} \tag{19.9}$$

となる．よって，汎関数積分 (19.7) は

$$\begin{aligned}\langle 0|F\,e^{-HT}F^\dagger|0\rangle &= \int d\mu\ e^{-\mathcal{S}_E}\,U^{ba}(y',x')\,U^{ab}(x,y)\\ &= \int d\mu\ e^{-\mathcal{S}_E}\,W_R(C)\end{aligned} \tag{19.10}$$

となる．ここで，C は頂点が x, y, x', y' の長方形である．(19.6) と (19.10) から，

$$\langle W_R(C)\rangle \approx \mathcal{N}e^{-E(r)T} \tag{19.11}$$

となることがわかる．したがって，大きなウィルソン・ループのユークリッド空間での期待値を計算することで，重く静的な粒子・反粒子対の相互作用エネルギーを求めることができる．ここでは $A_0 = 0$ ゲージを使ったが，$W_R(C)$ はゲージ不変であり，エネルギーもゲージ不変な状態のものなので，ここでの議論は一般に成り立つ．重いクォーク・反クォーク対の場合，$E(r) = \sigma r$ なので，この情報は次のように書き直すことができる．

$$\langle W_R(C)\rangle \approx \mathcal{N}\exp(-\sigma\, r\, T)$$

$$\approx \mathcal{N} \exp(-\sigma \mathcal{A}(C)). \tag{19.12}$$

ただし，$\mathcal{A}(C)$ は境界が C である最小表面積である．

ウィルソン・ループの「面積則」を双対超伝導の描像と関係させるには，通常の超伝導体における渦糸について議論し，これがモノポール間の線形なポテンシャルを導くことを示し，さらにその双対描像に移らねばならない．そこで，次にこの渦糸について考えよう．

19.1.3 トポロジカル渦糸

非相対論的なアーベル型ヒッグス模型は超伝導のランダウ–ギンツブルク理論を与える．この模型の渦糸励起はアブリコソフによって初めて解析された．ここでは相対論的な模型を考えよう．この模型の渦糸についての先駆的な研究はニールセン (Nielsen) とオルセン (Olesen) による．

式 (12.119) で与えられたアーベル型ヒッグス模型の作用は

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(\phi^*\phi)\right],$$
$$V(\phi^*\phi) = \lambda(\phi^*\phi - v^2/2)^2 \tag{19.13}$$

である．この作用に対応するハミルトニアンは

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(E^2 + B^2) + \dot{\phi}^*\dot{\phi} + (D_i\phi)^*(D_i\phi) + V(\phi^*\phi)\right] \tag{19.14}$$

である．場とその微分の汎関数として H を極小化すると

$$\dot{\phi} = 0, \qquad D_i\phi = 0,$$
$$V(\phi^*\phi) = 0, \qquad E = B = 0 \tag{19.15}$$

が得られる．この条件式の解は $\phi = v/\sqrt{2}$ である．よって，古典的な真空は $\phi = v/\sqrt{2}$ で与えられる．この期待値をもちいて真空状態を構成すると，12 章で議論した標準的なヒッグス機構が得られる．

つぎに，ゼロでない有限なエネルギーをもつ静的な古典解を考えよう．有限なエネルギーの場合，(19.14) の被積分関数は空間の無限遠でゼロとなるので，積分は収束する．このため，空間の無限遠で場は条件式 (19.15) をみ

たす解となる．このとき V はゼロとなる必要があるので，空間無限遠で ϕ は $\phi = (v/\sqrt{2})\exp(i\theta)$ の形で表される．これは空間無限遠の S^2 から $U(1)$ への写像 $e^{i\theta}\ :\ S^2 \to U(1)$ を与える．このような写像のホモトピー類は $\Pi_2(U(1)) = 0$ で与えられるので，場の空間は連結成分を1つだけもち，ハミルトニアンの極小化を要請すると真空しか解はない．しかし，単位長さ当たりに有限なエネルギーをもつ渦糸を考えると，非自明なトポロジーをもつ解が得られる．最も単純な場合は渦糸が直線のときであり，渦糸の伸びる方向を x^3 軸にとることができる．静的な配位がもつ単位長さ当たりのエネルギーは

$$\mathcal{E} = \int d^2x\ \left[\frac{1}{2}B^2 + (D_i\phi)^*(D_i\phi) + V(\phi^*\phi)\right] \tag{19.16}$$

で与えられる．これが有限であるためには $r^2 = x_1^2 + x_2^2 \to \infty$ で $\phi \to (v/\sqrt{2})e^{i\theta}$ が必要であるので，

$$e^{i\theta} : S^1 \to U(1) \tag{19.17}$$

となる．このような写像のホモトピー類は $\Pi_1(U(1)) = \mathbf{Z}$ で与えられる．この写像の巻き数は

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{i}{2\pi}\int d^2x\ \epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial_\mu\phi^*\partial_\nu\phi}{\phi^*\phi} \\ &= -\frac{i}{2\pi}\oint_{|x|\to\infty}\frac{\phi^* d\phi}{\phi^*\phi} \end{aligned} \tag{19.18}$$

である．よって，単位長さ当たりに有限なエネルギーをもつ場の配位空間には，Q でラベルされる無限個の連結成分がある．最も簡単な非自明な場合は $Q = 1$ であり，このとき $r \to \infty$ で $\phi \to (x_1 + ix_2)/r$ が必要となる．より一般的に，ゲージ対称性 G が自発的に破れて H となる場合，渦糸に関するホモトピー群は $\Pi_1(G/H)$ で与えられる．

エネルギーの有限性から，$(D_i\phi)^*(D_i\phi)$ の項も $x_1^2 + x_2^2 \to \infty$ でゼロとなる必要がある．そのためには，$\partial_i\phi$ が $-ieA_i\phi$ で相殺されるように A_i の解を選べばよい．このとき，

$$
Q = \frac{e}{2\pi} \oint_{|x|\to\infty} A, \qquad \int d^2x\, F = \frac{2\pi}{e} Q \tag{19.19}
$$

と書ける．したがって，巻き数が Q の配位は強さがそれぞれ $2\pi/e$ である Q 本の磁束線を与えると解釈できる．これらの磁束線は磁荷 $1/2e$ をもつディラック・モノポールとディラック・反モノポールとをつなぐのにちょうど必要なものであることに注意しよう．以上から，渦糸が非自明な $\Pi_1[U(1)]$ をもつという位相幾何学的な性質により，渦糸の磁束が量子化されることがわかる．

$Q = 1$ の場合，試行関数として

$$
\phi = \frac{v}{\sqrt{2}} h(r)\, e^{i\theta}, \qquad eA_i = -\frac{\epsilon_{ij}x^j}{r^2} f(r) \tag{19.20}
$$

を選ぶのがよい．このとき，時間に依存しない場の運動方程式は

$$
\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\xi}\frac{df}{d\xi}\right) - \frac{h^2(f-1)}{\xi^2} = 0, \qquad \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dh}{d\xi}\right) - \frac{h(f-1)^2}{\xi^2} - \frac{M_H^2}{2M_V^2} h(h^2-1) = 0 \tag{19.21}
$$

となる．ただし，$\xi = evr$ である．渦糸の解析には 2 つのスケール・パラメータが存在する．これらは，ベクトル粒子の質量 $M_V = ev$ とヒッグス・スカラー粒子の質量 $M_H = \sqrt{2\lambda}\, v$ である．また，単位長さ当たりに有限なエネルギーをもつ必要があるので，関数 f, h の漸近的な振る舞いは

$$
f \to 1 + \alpha \exp(-M_V r), \qquad h \to 1 - \beta \exp(-M_H r) \tag{19.22}
$$

と表せる．第 1 種，第 2 種の超伝導体はそれぞれ

$$
\frac{M_H}{M_V} < 1 \quad (\text{第 1 種}), \qquad > 1 \quad (\text{第 2 種}) \tag{19.23}
$$

に対応する．第 1 種の場合，ヒッグス場はゲージ場よりもゆっくりと減衰する．その結果，磁束はヒッグス場がゼロに近い領域に収まる．第 2 種の場合，ゲージ場のほうがよりゆっくりと減衰し，超伝導体にチューブ状の磁束が現れる．式 (19.21) の正確な解析解は知られていないが，大雑把な解析だけか

ら，多くの本質的な特徴を知ることができる．式 (19.21) は次のエネルギー汎関数の変分方程式である．

$$\mathcal{E} = 2\pi v^2 \int \xi d\xi \left[\frac{1}{2}\left(\frac{f'^2}{\xi^2} + h'^2 + \frac{h^2(f-1)^2}{\xi^2}\right) + \frac{\lambda}{4e^2}(h^2-1)^2\right]. \tag{19.24}$$

この汎関数（あるいはその一般形 (19.16)）の不等式をもちいると，第 1 種超伝導体の渦糸は互いに引き付け合い，重なり合うようになることがわかる．また，第 2 種超伝導体の場合は，渦糸が互いに反発し合い，複数の渦糸による配位が問題なく定義されることを示せる．

これまで簡単のため x^3 軸に沿った渦糸を考えた．この渦糸の揺らぎは渦糸のゆがみに対応しているとみなせる．一般に，ある曲線 C' に沿った渦糸を考えることができる．前述のように，渦糸の端はモノポールとなる．これは磁束線の端が磁荷で与えられるからである．しかし，渦糸が閉ループを成すことも可能である．というのも，そのような場合でも磁束線が問題なく保存されるからである．

つぎに，非常に細い渦糸を考えよう．これは，M_H と M_V が非常に大きく，かつ $M_H \gg M_V$ のときに得られる．まず，このような渦糸を生成する演算子を導入しよう．3 次元空間にある渦糸の曲線を C' で表し，その座標を $z^i(\tau)$ とする．この渦糸の磁束は

$$\begin{aligned} F &= 4\pi g \int_{C'} d\tau \ \frac{dz^k}{d\tau}\delta^{(3)}(x - z(\tau))\,\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}dx^i \wedge dx^j \\ &\equiv F_v \end{aligned} \tag{19.25}$$

で与えられる．ここで，$g = \frac{1}{2e}$ は渦糸の強さである．渦糸と垂直に交わる曲面で F を積分すると，(19.19) で要請されたように，$2\pi/e$ となることが簡単に確認できる．α を $d\alpha$ が上式の右辺を与えるような 1-形式とする．すなわち，これは渦糸の磁場を与える特定のポテンシャルである．F は渦糸 C' の曲線上を除くすべての場所でゼロとなることに注意すると，α は $\mathbf{R}^3 - \{C'\}$ 上で閉 1-形式となることがわかる．

つぎに，渦糸の生成演算子を構成しよう．$A_0 = 0$ ゲージをとると，$U(1)$ ゲージ理論の作用は

$$S = \int d^4x \ \left[\frac{1}{2}(\partial_0 A_i \partial_0 A_i) - \frac{1}{2}B^2\right] \tag{19.26}$$

となる．したがって，同時刻の交換関係は

$$[A_i(x), E_j(y)] = i\,\delta^{(3)}(x-y) \tag{19.27}$$

となる．ハミルトニアン形式による解析を行うには，さらにガウス則を課さなければならない．以前の電磁場についての議論では，このガウス則を具体的に解いた．別の方法として，物理的な状態がゲージ変換のもとで不変であることを要請してもよい．これは数学的には，すべての物理状態 $|\psi\rangle$ に対して，

$$(\nabla \cdot E - J_0)\,|\psi\rangle = 0 \tag{19.28}$$

を要請することに相当する．渦糸の生成演算子の構成には通常この手法がもちいられる．

このとき，渦糸 (19.25) を生成する演算子は

$$T(C') = \exp\left(-i\int d^3x \ \alpha_i E_i\right) \tag{19.29}$$

で与えられる．これより，正準交換関係をもちいると，

$$T^{-1}(C')\,A_i(x)\,T(C') = A_i(x) + \alpha_i(x) \tag{19.30}$$

が得られる．曲面 Σ を貫通する磁束は $\oint_C A$ で測られる．ただし，$\partial\Sigma = C$ である．(19.30) をもちいると，

$$\begin{aligned} T^{-1}(C')\left[\oint_C A\right]T(C') &= \oint_C (A+\alpha) \\ &= \oint_C A + \int_\Sigma F_v \end{aligned} \tag{19.31}$$

となるので，演算子 $T(C')$ によって磁束は渦糸の磁束分だけシフトすることがわかる．よって，$T(C')$ が渦糸の生成演算子であるという解釈は正しい．渦糸が曲面 Σ と交わらない場合，積分 $\int_\Sigma F_v$ はゼロとなる．渦糸が曲面と 2 回以上交わるときは，交差のたびに同じ分だけの寄与が得られる．したがって，

$$\int_\Sigma F_v = 4\pi g\, L(C, C') \tag{19.32}$$

と書ける．ただし，$L(C,C')$ は閉曲線 C が曲線 C' とが絡み合う回数を表す．

これはガウスの絡み数 (linking number) と呼ばれる．この数は C' が無限に長い場合，あるいは閉じている場合にのみトポロジカル不変量として意味をもつ量である．2 つの閉曲線 C, C' に対するガウスの絡み数は

$$L(C, C') = -\frac{1}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \epsilon_{ijk} \frac{(x-y)^i}{|x-y|^3} dy^j dx^k \tag{19.33}$$

と書ける．よって，式 (19.31) は

$$\left[\oint_C A\right] T(C') = T(C') \left[\oint_C A\right] + T(C')\, 4\pi g\, L(C, C') \tag{19.34}$$

と書き換えられる．

アーベル型の場合，ウィルソン・ループ演算子は

$$W(C) = \exp\left[ie \oint_C A\right] \tag{19.35}$$

となる．ここで，恒等式

$$\exp\left[-ie \oint_C A\right] E_i(x) \exp\left[ie \oint_C A\right] = E_i(x) + e \oint_C \delta^{(3)}(x - z(\tau)) \frac{dz_i}{d\tau} d\tau \tag{19.36}$$

を考えよう．これより，ウィルソン・ループ演算子は細長いチューブ状の電束（あるいは電気的な紐）を曲線 C 上に生成する演算子であるとも考えられる．これらの考察から，$T(C')$ と $W(C)$ の 2 つの演算子は双対的に解釈できることがわかる．すなわち，$T(C')$ は磁束線を生成する演算子と考えられ，このとき $\oint_C A$ は C を通過する磁束の強さを与える．一方，$W(C)$ は電束線を生成する演算子と考えられ，電束の強さは $T(C')$ で与えられる．ベキ指数の形をもちいて，これらの交換関係を表すと，

$$\begin{aligned} W(C)\, T(C') &= \exp(i4\pi eg)\, T(C')\, W(C) \\ &= T(C')\, W(C) \end{aligned} \tag{19.37}$$

となる．渦糸の磁束が量子化され $eg = n/2$（n は整数）となるので，付加的な位相因子は 1 である．したがって，この交換関係はディラックの量子化条件を別の形で言い換えたものとなっている．

$T(C')$ と $W(C)$ の演算子は，超伝導相を生じさせる詳細な枠組みに頼るこ

となく，ゲージ理論の相を特定する手法を提供する．$E_i = \epsilon_{ijk}\partial_j \tilde{A}_k$ となるような電場に対する双対ポテンシャル $\tilde{A}$ を導入すると，

$$T(C') = \exp\left(-i4\pi g \oint \tilde{A}\right) \tag{19.38}$$

と表せる．このような双対ポテンシャルの導入にはある制約が伴うが，上式は $T(C')$ が実際に電磁双対変換のもとで $W(C)$ と双対関係にあることを示している．すでに見たように，荷電粒子の閉じ込めはウィルソン・ループの面積則で記述される．磁荷をもつ粒子の閉じ込めは通常の電気的な超伝導体で起きる．このとき超伝導体にはモノポール・反モノポールのペアを連結する渦糸が存在する．このような配位のエネルギーはモノポール間の距離に比例して大きくなる．というのも，渦糸のエネルギーはこの距離に比例するためである．$T(C')$ は磁束線を生成するので，ウィルソン・ループの議論と同様に，モノポール・反モノポール対の線形なポテンシャルから $T(C')$ の期待値についての面積則が導かれる．$W(C)$ に戻って考えると，その期待値の面積則は磁気的な超伝導体によるものであると解釈できる．以上をまとめると

$$\begin{aligned} \langle T(C')\rangle &\sim \exp(-\sigma\mathcal{A}(C')) \quad \begin{cases} \text{電気的な超伝導体} \\ \text{磁気的な閉じ込め効果} \end{cases} \\ \langle W(C)\rangle &\sim \exp(-\sigma\mathcal{A}(C)) \quad \begin{cases} \text{磁気的な超伝導体} \\ \text{電気的な閉じ込め効果} \end{cases} \end{aligned} \tag{19.39}$$

となる．このように理論の相構造を定義する利点は，ゲージ場だけから作られる演算子を使ってゲージ不変に相が特定できることである．つまり，ここでは（クーパー対などのように）非アーベル型への拡張が困難なゲージ場以外の場が現れない．さらに，この議論では（電場と磁場の）双対性が明白である．この性質を非アーベル型の理論に拡張するには，非アーベル型へ一般化された演算子 $T(C')$, $W(C)$ を考えなければならない．

この演算子 $T(C')$ はゲージ理論の相を特定する目的でトフーフトによって導入されたので，以下ではこれをトフーフト・ループ演算子と呼ぶ．

19.1.4　非アーベル型双対超伝導

前節のアイデアを非アーベル型ヤン–ミルズ理論に一般化するために，まず，演算子 $T(C')$ を $SU(N)$ ゲージ理論の $U(1)$ 部分群において構成してみよう．$SU(N)$ 群は非自明な中心要素 (central element) をもつ．つまり，$SU(N)$ のすべての要素と交換する $SU(N)$ の要素が存在する．$SU(N)$ の中心要素は巡回群 $\mathbf{Z}_N$ を成し，その要素は $(N \times N)$ 行列の集合 $\{1,\ \omega,\ \omega^2, \ldots, \omega^{N-1}\}$ で表される．ただし，$\omega = \exp(2\pi i/N)$ である．これらの要素は，行列としては，恒等行列に比例するので，明らかに $SU(N)$ のすべての要素と交換する．その具体的な構成は次のようになる．まず，$t_a\ (a = 1, 2, \ldots, N^2 - 1)$ を $(N \times N)$ 行列で表される $SU(N)$ のリー代数の基底としよう．規格化条件は，いつもどおり，$\mathrm{Tr}\, t_a t_b = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
t_{N^2-1} &= \sqrt{\frac{N}{2(N-1)}}\, diag\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}, -1 + \frac{1}{N}\right) \\
&\equiv \sqrt{\frac{N}{2(N-1)}}\, Y
\end{aligned}
\tag{19.40}
$$

を考えよう．対応する群の要素は

$$
\exp\left(2\pi i \sqrt{\frac{2(N-1)}{N}}\, t_{N^2-1}\right) = \exp(2\pi i Y) = e^{2\pi i/N} = \omega \tag{19.41}
$$

となる．これは，t_{N^2-1} に対応する群のパラメータを $\theta_{N^2-1} = 2\pi\sqrt{2(N-1)/N}$ に選んでいることに相当する．随伴表現に属する場は $\phi \to \phi' = g\phi g^{-1}$, $\phi = \phi^a t_a$, $g \in SU(N)$ と変換する．これらは $\mathbf{Z}_N$ のもとで不変である．随伴表現のテンソル積を簡約したものから得られるすべての表現についてもまた不変である．このようなすべての場（これには随伴表現に属するゲージ場も含まれる）に対して，ゲージ群は実際には $SU(N)/\mathbf{Z}_N$ で与えられる．特に，$\mathbf{Z}_N$ 不変な場のすべての成分は Y について整数の固有値をもつ[3]．基本表現に属する物質場は，$\phi' = g\,\phi$ と変換するため，$\mathbf{Z}_N$ 不変ではない．これらに対しては，Y は分数の固有値をもつ．

---

[3]［訳註］例えば随伴表現の場合 $\phi \to \phi' = g\phi g^{-1}$ の g に $\mathbf{Z}_N$ の元を入れてみるとよい．

$SU(N)$ は単純連結な群であるが，もし場が $\mathbf{Z}_N$ 不変であれば，関与する群は $SU(N)/\mathbf{Z}_N$ となり，これは単純連結ではない．実際，$\Pi_1[SU(N)/\mathbf{Z}_N] = \mathbf{Z}_N$ であるので，すべての場が $\mathbf{Z}_N$ 不変であるような理論を考えると，対称性が完全に自発的に破れると $\mathbf{Z}_N$ 渦糸が現れる．この渦糸についてさらに詳しく調べてみよう．

まず，生成子 t_{N^2-1} あるいは Y で定義される $SU(N)$ の $U(1)$ 部分群について見てみよう．共変微分は

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieYA_\mu\phi \tag{19.42}$$

の形で書ける．(ここでは規格化因子の $\sqrt{N/2(N-1)}$ は場 A_μ に吸収したとして Y をもちいている.）この $U(1)$ 群は $SU(N)/\mathbf{Z}_N$ のある表現に属するヒッグス場によって破られる．例えば，随伴表現に属するヒッグス場の成分の多くは Y の固有値がゼロでないので，この $U(1)$ のもとで非自明に変換する．よって，これらの期待値を使って対称性を破ることができる．この $U(1)$ 対称性が破れると，以前議論したように渦糸が現れる．Y の固有値は整数なので，渦糸の磁束は $2\pi/e$ を単位として量子化される．よって，すでに見たように演算子 $T(C')$ を構成できる．つぎに，(19.3) で定義されるウィルソン・ループ演算子を考えよう．アーベル型の場合と異なり，$\oint_C A$ はゲージ不変な演算子として使えない．リー代数の行列についての経路順序積とトレースを伴った指数関数で表されているものだけがゲージ不変な演算子となる．したがって，$W(C)$ をもちいて渦糸の磁束を検出できるかどうか調べなければならない．基本表現に属するウィルソン・ループでは，Y の値は $1/N$ か $-1+(1/N)$ である．この場合，簡単に

$$W_F(C)\,T(C') = \exp\left(\frac{2\pi iL(C,C')}{N}\right) T(C')\,W_F(C) \tag{19.43}$$

となることがわかる．ただし，$T(C')$ は磁束の強さが $2\pi/e$ の素渦糸の生成演算子である．よって，磁気渦糸は基本表現の $W(C)$ をもちいて検出できる．ここでは，基本表現をもつ力学的な電荷は考えていない．したがって，これは，系の外部にあり基本表現に属す（力学的でない）重い電荷によって，特定の磁束をもつ渦糸が検出できることを意味する．ここで，磁束の強さは $k\,2\pi/e$ $(k = 1, 2, \ldots, N-1)$，あるいはより一般に $2\pi/e$ を単位とした N を

法 (modulo) とする値で与えられる.

単に $U(1)$ 場だけの議論では，基本単位 $2\pi/e$ の N 倍（あるいはその整数倍）の強さの磁束をもつ渦糸も存在する．これらに対する $T(C')$ 演算子は $W_F(C)$ と可換なので，任意の表現に属す $W(C)$ とも交換する．これらは検出されない．実際，対象としている $U(1)$ 部分群を $SU(N)$ 全体に埋め込むと，これらは意味を成さない．というのも，$\Pi_1[SU(N)/\mathbf{Z}_N] = \mathbf{Z}_N$ なので，唯一，意味のある磁束は N を法とするものだからである.

$\mathbf{Z}_N$ 不変な非アーベル型理論において，物理的に意味のある磁束は $\mathbf{Z}_N$ の値をもつので，演算子 $T(C')$ を交換関係 (19.43) で**定義**することができる．もし $T(C')$ が (19.43) で定義されているとすると，$T(C')$ と $W(C)$ の演算子は（アーベル型のときに示したように）完全にゲージ場だけで表され，$T(C')$ の導出にもちいたヒッグス場や自発的対称性の破れの考え方には依存しない．電磁渦糸の生成演算子がみたす一般的な代数としての交換関係 (19.43) は，トフーフトによって最初に求められたため，トフーフト代数と呼ばれることが多い．$W_F(C)$ が色電荷を帯びた紐（ただし，色電荷フラックスは基本表現に属する重い粒子のペアをつなぐのに必要な分だけの値をもつ）を生成し，色磁荷フラックスを検出する演算子であるという解釈はやはり正しい．また，$T(C')$ は色磁荷を帯びた紐を生成し，色電荷フラックスを検出する．ここで，これらの演算子をもちいてゲージ理論における双対性の概念と相を特徴づけよう．すでに見たように，線形ポテンシャルによる重いクォークの閉じ込めはウィルソン・ループの期待値に対する面積則で特徴づけられる．これは，色磁気的な超伝導体相の定義とみなせる．この双対相は $T(C')$ の面積則に対応し，これは色電気的な超伝導体相であるとみなせる.

したがって，ウィルソン・ループ $W_F(C)$ は，すべての力学的な場が $\mathbf{Z}_N$ 不変であれば，秩序パラメータとみなせる．この解析は，閉じ込めについての証明を与えるものでは一切なく，また，その論理的な議論を提供するものでもない．ここでの議論では，$\mathbf{Z}_N$ 不変でない重い荷電状態が閉じ込められていることを数学的に示すには，その結果の 1 つとして，$W_F(C)$ の真空期待値についての面積則が証明されなければならないという定性的な描像を与えたにすぎない．これより，真空状態は色磁気的な超伝導体の状態に対応していることがわかる.

つぎに，基本表現あるいは $\mathbf{Z}_N$ 不変でないその他の表現に属す物質場を入れたときにどのような理論になるかを考えてみよう．色力学は基本表現のクォークを含むので，これは明らかに物理的に興味深い場合である．この場合，関与する群は $SU(N)$ となる．これは単純連結な群であり，渦糸は現れない．よって，この理論の相を $W(C)$ と $T(C')$ の秩序パラメータで特徴づけることはもはやできない．ただ，これにより閉じ込めの概念がなくなるわけではない．つまり，閉じ込めは1重項であるすべての漸近状態をもちいて定義はできるが，$\langle W_F(C)\rangle$ を閉じ込めのプローブあるいは信号としてもちいることはもはやできないということである．クォークのように $\mathbf{Z}_N$ 不変でない場があると，$\langle W_F(C)\rangle$ が使えないことを次のようによりはっきりと見ることもできる．クォークが入った理論では，十分なエネルギーがあれば，ある確率でクォーク・反クォーク対が生成される．よって，外から入れた重い荷電粒子とつながっている電気力線がちぎれ，ちぎれた線の端にクォークと反クォークが付くことができる．このような過程はガウス則と矛盾しない．この結果として新たに生成された粒子対の片割れと短距離間で結合した外部の電荷は遮蔽効果を受ける．この結合距離が長ければ，式 (19.4) の演算子 $F^\dagger$ は非常に不安定な状態を生成する．つまり，長い電気力線で結ばれた外から入れた荷電粒子対状態は，すぐに崩壊してしまうため安定な状態として存在することができない．

19.2　トフーフト–ポリヤコフの磁気単極子

これまで，磁気単極子（モノポール）の凝縮が双対超伝導体の状態を形成し，非アーベル型ゲージ理論における荷電粒子の閉じ込めを導くことを議論してきた．ただ，モノポールそれ自体はこの議論に直接もちいられなかった．対称性の自発的破れがない非アーベル型ゲージ理論では，磁荷のある配位が許される．これは双対超伝導体の描像を得るのに非常に重要であった．しかし，この理論においてモノポールは安定した配位として現れない．これまでモノポールそのものを議論しなかったのはこのためである．

対称性が自発的に破れるゲージ理論では，モノポールは有限なエネルギー

をもつ安定な古典解として現れる．また一般に，これらの解の多様な性質を理解する手法がモノポールによって与えられる．これらの解はトフーフト–ポリヤコフ・モノポールとして知られており，相互作用があっても，位相幾何学的に保存された電荷，すなわちモノポール数のためにその存在が保証される．すなわち，これらはソリトンである．よって，量子論ではこれらは粒子的に振る舞う励起状態とみなせる．モノポールはまた，電磁 $U(1)$ 群が半単純な非アーベル型の群に埋め込まれるようないかなる大統一理論 (grand unified theory) にも現れる．したがって，モノポールそれ自体も理論に存在しうる粒子的な励起状態の 1 つとして興味深い存在である．以下では，対称性が自発的に破れる理論のモノポール解について簡単に議論しよう．

ここで疑問となるのは,「一体なぜ，対称性が自発的に破れる非アーベル型ゲージ理論を考える必要があるのか？」という点である．モノポールの理論に興味があるのであれば，なぜ単に $U(1)$ 理論のディラック・モノポールを理論を構成するだけではいけないのであろうか？ 実際，これまでにディラック・モノポールのいくつかの性質について議論し，モノポールのチャージについての量子化条件をすでに求めた．しかし，場は原点あるいは（磁気）モノポールの位置に特異点をもち，古典的なエネルギーが無限大になる．これは電子の場合と同様であるので，モノポールを対応する場の演算子をもつ基本粒子として扱い，この無限のエネルギーを質量の繰り込み効果として吸収することができると思われる．しかし，これまで，この議論に沿ったチャージとモノポールについての十分に満足ゆく理論は構成されていない．

対称性 G が部分群 H に自発的に破れる非アーベル型ゲージ理論を考えよう．ポテンシャルエネルギーはヒッグス場の G 変換のもとで不変であるので，静的な配位に対するエネルギーの有限性から，ヒッグス場の漸近的な値は，G 変換の自由度を除いて，真空期待値をとることが要請される．ヒッグス場の期待値は H の作用のもとで不変なので，漸近的には，ヒッグス場の配位は G/H 空間にあることがわかる．したがって，漸近的には（$\mathbf{R}^3$ にある半径の大きな球面に対応する）S^2 から G/H の写像が得られる．このような写像のホモトピー類は $\Pi_2(G/H)$ で与えられる．もしこれがゼロでなければ，磁気単極子が得られる．ここで，ホモトピー完全系列

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \to & \Pi_2(G) & \to & \Pi_2(G/H) & \to & \Pi_1(H) & \to & \Pi_1(G) & \to & \cdots \\
\\
\cdots & \to & 0 & \to & \Pi_2(G/H) & \to & \Pi_1(H) & \to & 0 & \to & \cdots
\end{array}
\tag{19.44}
$$

をもちいると，G が単純連結な群であれば，$\Pi_2(G/H) = \Pi_1(H)$ となることがわかる．

この構造をみたす簡単な模型は $SU(2)$ ゲージ理論の $U(1)$ 部分群への自発的な破れで与えられる．ヒッグス場は $SU(2)$ の 3 重項状態ととることができ，作用は

$$
S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^a (D^\mu \phi)^a - V(\phi^a \phi^a) \right] \tag{19.45}
$$

で与えられる．ただし，

$$
\begin{aligned}
(D_\mu \phi)^a &= \partial_\mu \phi^a + e\epsilon^{abc} A^b_\mu \phi^c, \\
V(\phi^a \phi^a) &= \frac{\lambda}{4} \left(\phi^a \phi^a - v^2 \right)^2
\end{aligned}
\tag{19.46}
$$

$(a, b, c = 1, 2, 3)$ である．ヒッグス場は 3 重項なので，ゲージ群は実際には $SU(2)$ ではなく $SO(3)$ となり，対称性の破れは $SO(3) \to SO(2)$ で与えられる．

静的な配位のエネルギーは

$$
\mathcal{E} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} B^a_i B^a_i + \frac{1}{2} (D_i \phi)^a (D_i \phi)^a + V(\phi^a \phi^a) \right] \tag{19.47}
$$

となる．古典的な真空の配位は V の極小で与えられる．これは，$\phi^a = \delta^{a3} v$ とおける．等方部分群は $SO(2)$ であり，これは $a = 3$ 方向のまわりの回転群に対応している．よって，ヒッグス場によってゲージ群は $SO(2) \sim U(1)$ に破れる．ゲージ場の成分 $W^\pm_i = (A^1_i \mp iA^2_i)/\sqrt{2}$ は質量 $M_V = ev$ を獲得する．保存される $SO(2)$ 方向は，このモデルの電磁 $U(1)$ ゲージ群となる．(ϕ^a は実数なので，真空期待値を $v/\sqrt{2}$ ではなく v とするほうが便利である.)

有限エネルギーをもつ配位に対して，

$$
B^a_i \to 0, \quad (D_i \phi)^a \to 0, \quad \phi^a \phi^a \to v^2 \quad (r \equiv |\boldsymbol{x}| \to \infty) \tag{19.48}
$$

が必要である．最後の条件は，$r \to \infty$ で，写像 $\phi^a : S^2 \to S^2$ が得られることを示す．このとき，$\Pi_2[SO(3)/SO(2)] = \Pi_2[S^2] = \mathbf{Z}$ に対応するホモト

ピー類があり，これは巻き数

$$Q = \frac{1}{8\pi} \oint_{r\to\infty} \epsilon^{abc}\, \hat{\phi}^a\ d\hat{\phi}^b \wedge d\hat{\phi}^c \tag{19.49}$$

で特徴づけられる．ただし，$\hat{\phi}^a = \phi^a/|\phi|$ である．(この巻き数については 14 章で議論した．) Q は保存量である．つまり，古典的および量子的な遷移のもとで Q は保存される．真空の配位 $\phi^a = \delta^{a3}v$ に対しては，明らかに $Q = 0$ である．$D\phi$ が漸近的にゼロとなる要請から，

$$\oint \epsilon^{abc}\hat{\phi}^a (D\hat{\phi})^b \wedge (D\hat{\phi})^c = 0 \tag{19.50}$$

と書ける．これを変形すると，

$$\oint F^a \hat{\phi}^a = -\frac{4\pi}{e}\, Q \tag{19.51}$$

を得る．ここで，$F^a = dA^a + \frac{1}{2}\epsilon^{abc}A^b \wedge A^c$ は場の強さの 2-形式である．対称性が保存される方向は，Q がゼロでないセクターで，$\hat{\phi}^a$ によって漸近的に与えられる．したがって，$F^a\hat{\phi}^a$ は破られない群に対応する場の強さである．式 (19.51) は全磁束が Q に比例していることを示している．よって，ここで議論している配位は確かにモノポールを与える．このとき，モノポールは磁荷 $g = \frac{1}{e}$ をもつ．

$Q = -1$ となるモノポールの配位に対して，ϕ^a の漸近的な振る舞いは

$$\phi^a \to -v\, \frac{x^a}{r} \tag{19.52}$$

で与えられる．エネルギーの有限性から，ここでも $(D_i\phi)$ はゼロとなる．上式の ϕ^a の振る舞いから，

$$A_i^a \to \epsilon_{aik}\, \frac{x^k}{er^2} \tag{19.53}$$

が要請される．よって，任意の r に対する場の試行関数として適切なものは

$$\begin{aligned} \phi^a &= -v\, \frac{x^a}{r} \left[\frac{H(\xi)}{\xi} \right], \\ A_i^a &= \epsilon_{aik} \frac{x^k}{er^2} \left[1 - K(\xi) \right] \end{aligned} \tag{19.54}$$

で与えられる．ただし，$\xi = evr$ である．

空間の無限遠から原点に近づいてくる際，もし ϕ^a が $\phi^2 \neq 0$ でなめらかに変化すると，r それ自体をホモトピーのパラメータとしてもちいることができる．ϕ がどの領域でもゼロにならない場合，$Q \neq 0$ から $Q = 0$ の配位への写像において，これは矛盾をきたす．ただし，$Q = 0$ の配位は球面が大きさがゼロの点に収縮するときに得られる配位である．これは，Q がゼロでない配位に対して，ヒッグス場 ϕ^a は必ずどこかの領域でゼロとなる必要があることを意味する．さらに，$r \to 0$ で K は 1 とならなければならない．これは，$1/r^2$ 因子による特異点を $r = 0$ で避けるためである．したがって，

$$\begin{aligned} &\frac{H}{\xi} \to 1 \quad K \to 0 \quad (\xi \to \infty \text{ の場合}), \\ &\frac{H}{\xi} \to 0, \quad K \to 1 \quad (\xi \to 0 \text{ の場合}) \end{aligned} \tag{19.55}$$

が必要である．静的なエネルギーをこれらの試行関数をもちいて計算すると

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \frac{4\pi v}{e}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2}\bigg[\xi^2(\partial_\xi K)^2 + \frac{1}{2}\left(\xi\frac{dH}{d\xi} - H\right)^2 + \frac{1}{2}(K^2-1)^2 \\ + K^2H^2 + \frac{\lambda}{4e^2}(H^2-\xi^2)^2\bigg] \end{aligned} \tag{19.56}$$

となる．静的な運動方程式は

$$\begin{aligned} \xi^2\frac{d^2K}{d\xi^2} &= KH^2 + K(K^2-1), \\ \xi^2\frac{d^2H}{d\xi^2} &= 2K^2H + \frac{\lambda}{e^2}H(H^2-\xi^2) \end{aligned} \tag{19.57}$$

で与えられる．これらの式の厳密な解析解を得るのは困難であるが，条件 (19.55) のもとでその解を数値的に求めることはできる．解を使ってエネルギーを表すと，一般に

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi v}{e}f(\lambda/e^2) \tag{19.58}$$

の形で書ける．ただし，$f(0) = 1$ である．試行関数の漸近的な形は

$$H - \xi \sim \exp(-M_H r), \qquad K \sim \exp(-M_V r) \tag{19.59}$$

で与えられる．ここで，$M_V = ev$ と $M_H = \sqrt{2\lambda}\,v$ は対称性の破れによるベ

クトル場とスカラー場の質量である.

式 (19.57) を解析的に解くことはできないが，ボゴモルニー–プラサド–ゾマーフィールト (Bogomol'nyi–Prasad–Sommerfield (BPS)) 極限と呼ばれる特別な場合にはこれが可能となる．エネルギー汎関数 (19.47) が不等式

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\geq \int d^3x\ \left[\frac{1}{2}B_i^a B_i^a + \frac{1}{2}(D_i\phi)^a(D_i\phi)^a\right] \\ &\geq \int d^3x\ B_i^a(D_i\phi)^a \\ &\geq \frac{4\pi v}{e}\end{aligned} \tag{19.60}$$

に従うことに注意しよう．これは，$(B-D\phi)^2 \geq 0$ から得られる．上式で，ビアンキ恒等式 $(D_iB_i)^a = 0$ と式 (19.51) をもちいた．BPS 極限では，$r \to \infty$ での境界条件を $\phi^a\phi^a \to v^2$ に保ちつつ，$\lambda \to 0$ の極限を考える．よって，エネルギーに対するポテンシャル項 V の寄与はゼロとなり，

$$B_i^a = (D_i\phi)^a \tag{19.61}$$

ととると不等式 (19.60) は等式となる．この等式の解は

$$H(\xi) = \xi\coth\xi - 1, \quad K(\xi) = \frac{\xi}{\sinh\xi} \tag{19.62}$$

で与えられる．この場合，$\mathcal{E} = 4\pi v/e$ となり，(19.58) における条件 $f(0) = 1$ をみたす.

式 (19.51) から，磁荷と電荷は量子化条件 $eg = Q$ に従うことがわかる．ディラックの量子化条件は $eg = n/2$ であった．ここで eg がディラックの条件の 2 倍になっているのは，始めに群を $SU(2)$ ではなく $SO(3)$ に選んだことによる．実際，理論は $SO(3)$ のスピノール表現（つまり $SU(2)$ の基本表現）に対応する $e/2$ の電荷をとることができる．いまの場合，ディラックの議論をもちいると，$eg =$(整数) という結果が得られる．また別の手法として，ホモトピー群の完全系列

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Pi_2\,[SO(3)/SO(2)] & \to & \Pi_1[SO(2)] & \to & \Pi_1[SO(3)] & \to & 0 \\ 0 & \to & \mathbf{Z} & \to & \mathbf{Z} & \to & \mathbf{Z}_2 & \to & 0 \end{array} \tag{19.63}$$

に注意すると，$\Pi_2[SO(3)/SO(2)]$ の要素が $\Pi_1[SO(2)]$ の偶要素 (even element) に写像されることがわかるので，これをもちいると上の結果が得られる．

19.3　1/N 展開

ゲージ理論の非摂動的な解析のもう 1 つのアプローチとして，$1/N$ 展開法がある．場の個数は多くの理論で摂動級数の再分類や再和を支配するパラメータとして使われてきた．18 章でみたように，スカラー場の理論における対称性の回復に関する相転移の議論はその一例である．また，低次元理論の多くでは $1/N$ 展開をもちいた非摂動的な解析が成功している．物質場を含まない 4 次元の $SU(N)$ ゲージ理論では，漸近的自由性のために次元の転化 (dimensional transmutation) が起きる．つまり，結合定数は除去され，理論のスケールを定義する次元をもつパラメータ Λ で置き換えられる．漸近的自由性は，Λ よりも十分大きい運動量のモードが摂動的に扱えることを意味している．反対に，Λ と同等かそれより小さい運動量モードでは摂動論は適用できない．すべてのモードについて使用できるような明らかな展開係数は存在しない．ゲージ理論に $1/N$ 展開法を導入したトフーフトは，この展開係数として $SU(N)$ の N（あるいはカラーの数）が使用できることを見出した．（このときラージ N 極限はゼロ次の主要項を与える．）これが可能なことをみるには，ファインマン図の N 依存性についての規則を求める必要がある．そのためには，ゲージポテンシャル $(A_\mu)_{ij} = -i(t^a)_{ij}A^a_\mu$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$ を $(N \times N)$ 行列と考えるとよい．ただし，場の各要素はカラーの添え字 i, j で表され，この添え字は $1, 2, \ldots, N$ の値をとる．ここではラージ N 極限に興味があるので，ゲージ群を $SU(N)$ ではなく $U(N)$ にとることができる．こうすると，以下の議論が簡略化される．また，このために生じる余分な自由度の効果は，N が大きくなると，微小となる．よって，t^a は $U(N)$ の生成子であり，完全性の関係式 $(t^a)_{ij}(t^a)_{kl} = \frac{1}{2}\delta_{jk}\delta_{il}$ をみたす．ゴーストも随伴表現で与えられるので，$c_{ij} = c^a(t^a)_{ij}$, $\bar{c}_{ij} = \bar{c}^a(t^a)_{ij}$ などと書ける．グルーオンの伝播関数は

$$\langle (A_\mu)_{ij}(x)(A_\nu)_{kl}(y)\rangle \sim \delta^{ab}\eta_{\mu\nu}G(x,y) \sim \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\delta_{jk}\delta_{il} \qquad (19.64)$$

の形で表される．これはファインマン図に現れる伝播関数の線に沿ってカラーの流れがあることを示している．また，ファインマン図における $1/N$ 展開の主要項を求めるためには，グルーオンの外線と伝播関数の内線を図 19.1 に示すような二重線で表すとよい．

$\langle A_{ij}(x)A_{lk}(y)\rangle \quad =$

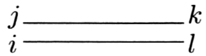


図 19.1　伝播関数の二重線表示．

するとこの二重線を通してファインマン図中のカラーの流れを追うことができる．カラーのループがあると N 倍の因子がかかる．これは添え字 i, j についてのトレースからくる．例えば，図 19.2 のようなグルーオン自己エネルギーの 1 ループ・ダイアグラムは e^2N のオーダーであることがわかる．ただし，e は結合定数である．



図 19.2　$1/N$ のオーダーをもつダイヤグラム．

結合定数は $1/\sqrt{N}$ のオーダーにとることができるので，このダイヤグラムはラージ N 極限で，ゼロ次のオーダーとなる．これは $1/N$ 展開における主要なオーダーである．同様に，図 19.3 のダイヤグラムも $1/N$ 展開で同じオーダーを与える．これは，カラー・ループが 1 つ追加されることによってそのトレースから N の因子が現れ，また新たな頂点からの寄与として e^2 の因子が現れるためである．対照的に，伝播関数の内線が交差する図 19.4 では $1/N^2$ のオーダーとなる．オーダーが N^0 となる始めの 2 つのダイヤグラムは，伝

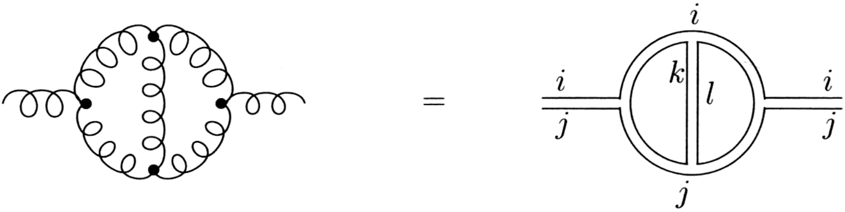


図 19.3　$1/N$ のオーダーをもつ別のダイヤグラム.



図 19.4　$1/N^2$ のオーダーをもつダイヤグラム.

播関数の内線が交差せず，平面上に描けることに注意しよう．これらは平面ダイヤグラム (planar diagram) と呼ばれる．最後のダイヤグラム（図 19.4）は N^{-2} のオーダーである．内線の交差なしにこれを描くには，ハンドル付きの平面が必要となる．外線が 2 本あるダイヤグラムに対して，ダイヤグラムを平面上に描く際に最低限必要なハンドルの数を h とすると，その N 依存性は N^{-2h} となることがわかる．二重線による数え上げの方法をもちいると，この N 依存性がより一般に成り立つことは簡単に確認できる．よって，すべてのファインマン図は，内線の交差なしにダイヤグラムを平面上に描くために最低限必要なハンドル数によって分類できる．外線がない場合，N 依存性は N^{2-2h} で与えられる．カラー 1 重項の演算子の相関関数では，i, j などのカラーの添え字は外線に現れない．よって，この場合も同じ N^{2-2h} 依存性をもつ．外線のある場合，一般的な次数の形は $a_N N^{2-2h}$ で与えられる．ただし，a_N は外線の数が等しいダイヤグラムに共通する N 依存の係数である．したがって，一般に相関関数の次数は

$$F = a_N \sum_h f_h N^{2-2h} \tag{19.65}$$

の形で与えられる．

$1/N$ 展開は，ファインマン図を描くことのできるハンドル付き平面についての展開である．弦理論では，弦の時間発展によって掃かれる世界面に対応するリーマン面があり，そのハンドル数をもちいて理論の摂動展開が得られる．この摂動展開と $1/N$ 展開の顕著な類似性は，ヤン–ミルズ理論のラージ N 極限が弦理論となることを示唆している．これはまた，双対超伝導体の描像とも一致している．というのも，この描像では重いクォークが細い色電気力線で結ばれており，これは本質的に弦とみなせるからである．しかし，これまでのところ，ヤン–ミルズ理論のラージ N 極限の計算から弦理論の解釈における最低次の結果を導くことに成功した例はない．もしそのような結果が得られれば，閉じ込めの機構やその他の非摂動的な問題に解決の糸口を与えるはずである．実際に簡略化された模型あるいは低次元の理論では，$1/N$ 展開法によって非摂動的な結果が得られている．

$1/N$ 展開は，ゲージ不変な演算子の真空期待値が主要なオーダーで因子化されるという興味深い性質をさらにもつ．α_1, α_2 をゲージ不変な 2 つの演算子としよう．$\langle\alpha_1\rangle$ と $\langle\alpha_2\rangle$ の主要項は平面上に描かれる閉じた二重線ループの集合で表される．ここで，α_1 と α_2 を結ぶ伝播関数の内線がある項を考えよう．この項は $\langle\alpha_1\alpha_2\rangle$ の連結成分に寄与する項である．伝播関数の内線を入れると，e^2 の因子が現れる．さらに，内線の 2 本のカラー線を α_1, α_2 のカラー線とつながなければならない．これは，カラー線による閉ループが 1 つなくなることを意味する．したがって，α_1 と α_2 が結ばれたダイヤグラムは $\langle\alpha_1\rangle\langle\alpha_2\rangle$ に比べて $e^2/N \sim N^{-2}$ のオーダーで抑えられる．この振る舞いは α_1 と α_2 を結ぶ伝播関数の数が増えても変化しない．これより，カラー 1 重項演算子の相関関数は各カラー 1 重項演算子の期待値の積に因子化されるという基本的な結果を導くことができる．

純粋なヤン–ミルズ理論では，理論のスペクトルはグルーボールと呼ばれるカラー 1 重項状態によって構成される．グルーボールはカラー 1 重項演算子によって真空から生成されるので，カラー 1 重項演算子の相関関数を調べることでグルーボールを解析することができる．カラーに量子数はないので，グルーボールの基本的な量子数はスピン (J)，パリティ(P)，荷電共役 (C) で与えられる．また，これらに加えて，同じ J^{PC} の値をもつ状態のうち，質量の

大きい状態を特徴づける量子数も定義できる．$\alpha(x)$ をカラー 1 重項演算子とし，$\langle\alpha(x)\rangle$ の N 依存性の主要なオーダーを，演算子自体の記号を流用して，N^α と表そう．$\langle\alpha(x)\alpha(y)\rangle$ に対する連結ダイヤグラムは $N^{2\alpha-2}$ のオーダーをもつ．これはグルーボールの伝播関数への主要な寄与となる．ここで，グルーボール演算子を $\mathcal{O}_\alpha(x) = N^{1-\alpha}\alpha(x)$ と規格化して定義しよう．つぎに，グルーボール $\mathcal{O}_\alpha(x)$ が演算子 $\mathcal{O}_\beta(y)$, $\mathcal{O}_\gamma(z)$ に対応する 2 つのグルーボールに崩壊するときの崩壊振幅を考える．$\langle\mathcal{O}_\alpha(x)\mathcal{O}_\beta(y)\mathcal{O}_\gamma(z)\rangle$ に対する連結ダイヤグラムは，$\mathcal{O}_\alpha(x)$ と $\mathcal{O}_\beta(y)$ を結ぶグルーオン伝播関数を少なくとも 1 つもち，また $\mathcal{O}_\alpha(x)$ と $\mathcal{O}_\gamma(z)$ を結ぶ別の伝播関数を少なくとも 1 つもつ．これより，$\langle\alpha(x)\beta(y)\gamma(z)\rangle$ に比べて余分な因子 N^{-4} が現れ，$\langle\mathcal{O}_\alpha(x)\mathcal{O}_\beta(y)\mathcal{O}_\gamma(z)\rangle$ は N^{-1} のオーダーとなる．したがって，グルーボールの崩壊振幅はラージ N 極限で $1/N$ となる．これは，ラージ N 極限でグルーボールが他の複数のグルーボールに崩壊しないことを意味している．すなわち，ラージ N 極限ではグルーボールは安定であると期待できる．同様の議論から，1 つのグルーボールが 3 つのグルーボールに崩壊する場合は N^{-2} のオーダーが現れる．$1 \to 3$ 崩壊振幅と $2 \to 2$ 散乱振幅は，あるエルミート有効ラグランジアンの同じ頂点関数から求められるので，グルーボールどうしの散乱振幅も N^{-2} のオーダーで抑えられることがわかる．(エルミート有効ラグランジアンが存在すると，運動量を適当に再定義すれば，入射粒子と放射粒子の交換のもとで散乱振幅が対称的であることがわかる．これは，交差対称性 (crossing symmetry) として知られている．)

上の結果は 2 つの意味で非常に有用である．例えば，ヤン–ミルズ理論のシュレーディンガー方程式が解けて，そのスペクトルを求めることができると想像してみよう．すると，J^{PC} の各値について，ただ 1 つの固有状態が得られる．というのも，高次の励起状態は一般に崩壊し，固有状態とはならないからである．しかし，ラージ N 極限の解析を行うと，高次の状態も安定であり，それらをラージ N 極限におけるハミルトニアンの固有状態とみなすことができ，その崩壊やその他の補正は二次的な過程であるとみなせる．したがって，$1/N$ 展開法は興味のある状態を選び出すのに有用である．第 2 に，ラージ N 極限では J^{PC} の各値に対して高次の質量状態を特徴づける量子数をもつ一連の状態が現れると予想される．これらの高次の質量状態は $\sim N^{-2}$

のオーダーの狭い共鳴幅をもつ．この描像はまた，弦理論で起こることと非常に類似しており，ラージ N ヤン–ミルズ理論がある種の弦理論を与えるというアイデアを支持するものである．

19.4　$1/N$ 展開におけるメソンとバリオン

閉じ込めの概念に従うと，QCD の状態はメソン，バリオン，グルーボールのようにカラー 1 重項の組み合わせで表されると予想される．では，メソンとバリオンに対するラージ N 極限での解析は何を意味するのであろうか？以下ではこれについて考えてみよう．

19.4.1　カイラル対称性の破れとメソン

$U(N)$ ヤン–ミルズ理論でフレーバーが N_f 個の無質量クォークを考えよう．まず，クォークは $U(N)$ の N 次元基本表現として変換するので，ゲージボソンを二重線で表すと，クォークのループは，カラーが 1 つだけの一重線で表される．その結果，相関関数に対応するダイヤグラムに対して，クォークのループは，ループのないダイヤグラムに比べて，N^{-1} の因子を与える．さらに，カイラル対称性の破れに関する以下の議論では QCD の軸性 $U_A(1)$ アノマリーは無関係である．(以下の議論からわかるように，アノマリーの効果は高々$1/N$ のオーダーでしかない.) クォーク質量とそれ以外のカイラル対称性を破る弱い項[4]を無視すると，カイラル対称性は群 $U_L(N_f) \times U_R(N_f)$ で与えられる．

コールマンとウィッテンは，ラージ N 極限をとると，QCD のカイラル対称性が対角的な部分群 $U_V(N_f)$ へ自発的に破れること示した．これを示すために，カイラル対称性の破れが次の形の複合場で記述されると仮定する．

$$\Phi^i_j \sim \bar{Q}^a_{Rj} Q^i_{La}. \tag{19.66}$$

カイラル対称性のもとで，これは $\Phi \to g_L \Phi g_R^\dagger$ と変換する．ただし，Φ^i_j は

[4] ［訳註］弱い相互作用は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ対称性をもち，カイラル対称性を破っている．

$(N_f \times N_f)$ 行列 Φ の行列要素とみなす．また，クォーク場のカラーの添え字 a については和がとられ，カラー 1 重項を成す．

Φ の有効ポテンシャル V は完全なカイラル対称性をもつ必要がある．カイラル変換によって，Φ は非負の実数をもつ固有値をもちいて対角化することができる．(この議論は 12 章における CKM 行列についての議論と同様である.）したがって，V は Φ の固有値，あるいは $\Phi^\dagger\Phi$ または $\Phi\Phi^\dagger$ の固有値の関数ととれる．V のなかには，$\mathrm{Tr}(\Phi\Phi^\dagger)^m$ という形の項が含まれるはずである．また，$\mathrm{Tr}(\Phi\Phi^\dagger)^k\mathrm{Tr}(\Phi\Phi^\dagger)^l$ のような項も含まれるはずである．さらに，$\Phi\Phi^\dagger$ の異なるトレース 3 つ以上による積も可能である．2 つの異なるトレースの積で表される項を考えると，Φ はクォークの演算子で構成されているので，基礎となる理論，すなわち量子色力学からそのような項を生成するには，対応するダイヤグラムにクォークのループが 2 つなければならない．連結されたダイヤグラムは有効ポテンシャルに寄与するので，2 つのクォーク・ループは少なくとも 1 つのグルーオン伝播関数によって結ばれなければならない．したがって，そのような項はトレースが 1 つの項に比べて N の次数が 1 低くなる．同様に，トレースの数が多くなると，それぞれ N^{-1} の因子ずつ小さくなる．よって，ラージ N 極限では，有効ポテンシャルの形は

$$V = N\sum_n c_n \mathrm{Tr}(\Phi\Phi^\dagger)^n = Nf(\Phi\Phi^\dagger) \tag{19.67}$$

となるはずである．ただし，f は N によらない関数を表す．全体にかかる因子 N は，$\langle\Phi\Phi^\dagger\rangle$ のような項を考えると正しいことがわかる．というのも，クォーク演算子のカラーについての和をとると N が得られるからである．$\Phi\Phi^\dagger$ の固有値 λ_i をもちいると，$V = N\sum_i f(\lambda_i)$ となる．関数 f が大域的な極小を 1 つだけ持つと仮定すると，極小点ではすべての固有値は同じ値（例えば λ_0）をとらなければならない．よって，Φ の期待値は $diag(\lambda_0, \lambda_0, \ldots, \lambda_0)$ の形で書けるはずである．したがって，対称性が破れない部分群は $U_V(N_f)$ となる．このようにラージ N 極限の考察から，もしカイラル対称性が破れるとすると，対角的な部分群への破れが好まれることがわかる．

極小点において Φ の期待値がすべて異なる場合は，対称性が破れない群が $U(1)^{N_f}$ であることに対応することに注意しよう．よって，Φ をもちいると，小さい部分群への破れが排除されることになる．これは議論の出発点として

は制限がきつすぎると思われる．しかし，ヴァッファとウィッテンの定理によると，クォークとベクトル的にしか結合しないゲージ理論ではパリティは自発的に破れない．したがって，電弱効果を無視すると，カイラル対称性が破れることのできる最小の群は $U_V(N_f)$ である．このことはラージ N 極限の議論を強く制限する．

理論上は，QCD にカイラル対称性の破れがなくても構わない．すなわち，λ_0 はゼロとなりうる．しかし，この可能性は次のように排除できる．任意のフレーバー・カレント，例えば $J_\mu = \bar{Q}_L \xi \gamma_\mu Q_L$ となる左巻きのカレントを考えよう．ここで，ξ は $U_L(N_f)$ の生成子の組み合わせで $\mathrm{Tr}(\xi^3) \neq 0$ を満たすものであるとする．このカレントは次のようなアノマリーをもつ．

$$
\begin{aligned}
r^\alpha \Gamma_{\mu\nu\alpha}(p,q,r) &= i\frac{N}{12\pi^2}\mathrm{Tr}(\xi^3)\epsilon_{\mu\nu\beta\gamma}p^\beta q^\gamma, \\
\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p,q,r) &\equiv \int d^4x_1 d^4x_2\, e^{ipx_1+iqx_2}\langle J_\mu(x_1)J_\nu(x_2)J_\alpha(0)\rangle. \qquad (19.68)
\end{aligned}
$$

ただし，$p^\alpha + q^\alpha + r^\alpha = 0$ である．(上の結果は次のように求めることができる．まず，フレーバー数がゼロでないゲージ場を考え，そのアノマリー方程式を導く．つぎに，この方程式に対してゲージ場についての汎関数微分を 2 度行い，最後にこのゲージ場をゼロにすると (19.68) が得られる.）この結果から，$\Gamma_{\mu\nu\alpha}$ は $p = q = r = 0$ で解析的でないことがわかる．もし解析的であれば，p, q で展開できる．しかし，運動量の級数表示が適切でありかつカレントの入れ換えについての対称性が満たされるような唯一の組み合わせは $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(p^\beta + q^\beta + r^\beta)$ で与えられ，これはゼロとなる．このことは (19.68) の結果が運動量ゼロにおける $\Gamma_{\mu\nu\alpha}$ の解析性と矛盾することを示している．したがって，$\Gamma_{\mu\nu\alpha}$ には p^{-2}, q^{-2} または r^{-2} のような質量ゼロの極がなければならない．これらの極は質量ゼロの粒子の伝播関数に対応していると考えられる．この質量ゼロの状態は J_μ が真空に作用することによって生成されるはずである．カレントはベクトルなので，これはベクトルあるいはスカラー粒子を生成すると考えられる．しかし，無質量粒子の場合，ベクトル粒子が生成される可能性はない．これは，次のように考えると簡単にわかる．運動量 k，偏極 λ をもつベクトル粒子がカレントによって生成されるとすると，$\langle k, \lambda | J_\mu(k) | 0\rangle = f_\mu^\lambda(k)$ と書ける．ただし，$J_\mu(k)$ は $J_\mu(x)$ のフーリエ変換

である．このとき，$\alpha_{\mu\nu} = \sum_\lambda f_\mu^\lambda(k) f_\nu^\lambda(k)$ というテンソル量は $k^\mu \alpha_{\mu\nu} = 0$, $k^\nu \alpha_{\mu\nu} = 0$ をみたす k の関数でなければならない．しかし，k_μ はヌル・ベクトルなので，そのようなテンソルは構成できない．(質量 m をもつベクトル粒子の場合，これは $\eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m^2$ で与えられる．）よって，J_μ はスカラー粒子を生成しなければならないと結論づけられる．カレントが無質量スカラー粒子を生成する唯一の方法は，自発的な対称性の破れによるものである．この場合，南部–ゴールドストン・ボソン φ をもちいて，$J_\mu \sim \partial_\mu \varphi$ となる．したがって，QCD にカイラル対称性の破れが起きなくてもよいという可能性は排除できる．

ここでのアノマリーに基づいた議論は，17 章で述べたトフーフトによる一般的なアイデアの特別な場合である．このアイデアは，閉じ込め相におけるアノマリーの一致をクォークの計算をもちいて調べることで，理論に許される対称性の破れのパターンをみつけることができるというものであった[5]．

ラージ N 極限におけるカイラル対称性の破れの概念を認めると，12 章の有効ラグランジアンを使って相互作用を表すことができる．このとき，メソン–メソン相互作用は f_π^{-2} のオーダーで与えられた．$\bar{Q}Q$ の期待値は（クォークの 1 ループのため）N のオーダーとなるので，メソンの演算子は $N^{-1/2}\bar{Q}Q$ の形となる．このような演算子が 3 つある場合，主要ダイヤグラムはまたクォークの 1 ループをもつので，3 メソンの頂点関数は $N^{-1/2}$ のオーダーとなる．メソン–メソン散乱の振幅は N^{-1} のオーダーである．よって，f_π^2 は N のオーダーをもつと解釈されなければならない．これはまた，次の式をファインマン図で展開し N の次数を数え上げることによって直接みることもできる．

$$\langle 0|J_\mu|k\rangle = -i f_\pi^2 k_\mu \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega_k V}}. \tag{19.69}$$

上式は本質的に (12.103) と同じである．

19.4.2　バリオン

つぎに,「ラージ N 極限でバリオンがどのように見えるか？」という問題

---

5 ［訳註］このアイデアについては 17.4 節を参照されたい．

を考えてみよう．$U(N)$ ゲージ理論においてバリオンはクォークが N 個の束縛状態である．ウィッテンによる以下の議論をもちいると，バリオンの質量の N 依存性を推定することができる．クォークは複数のグルーオンの交換によって生成されるポテンシャルを通して相互作用する．バリオンを構成するクォーク間で交換する1つのグルーオンは $e^2 \sim 1/N$ の因子を与えると考えられる．よって，同じクォーク間に働くグルーオン伝播関数を足し合わせると $e^2 N \sim 1$ となる．ただし，因子 N はカラー添え字についてのトレースによるものである．したがって，クォーク間の相互作用エネルギーはラージ N 極限で $1/N$ のオーダーとなる．バリオンには $\frac{1}{2}N(N-1)$ 個のクォークのペアがあるので，相互作用の全エネルギーはラージ N 極限で $e^2 N(N-1) \sim N$ と振る舞う．N は展開係数なので，バリオンのエネルギーはこの展開係数の逆数に比例することがわかる．これは場の理論におけるソリトンに典型的な事柄である．この場合，ソリトンの質量は，結合定数 λ をもちいて，$1/\lambda$ のオーダーで与えられる．これらは摂動論から導くことはできない．つまり，これらを得るには，安定で粒子的に振る舞う非摂動的な場の配位を探さなければならない．よって，ラージ N 極限においてバリオンはソリトンとみなせる．

12章ですでに見たように，ラージ N 極限におけるカイラル対称性の破れのため，有効理論は

$$\mathcal{S} = \frac{f_\pi^2}{4} \int d^4x \ \mathrm{Tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) - \frac{iN}{240\pi^2} \int_{\mathcal{D}} \mathrm{Tr}(dU\, U^{-1})^5 \tag{19.70}$$

で記述されるメソン理論で与えられる．これはクォーク質量と電弱ゲージ場を無視した作用であり，(12.89) と (17.32) を足し合わせたものである．つぎに，この理論がソリトン解をもつことを示そう．この解は発見者のスキルム (Skyrme) にちなんでスキルミオン (skyrmion) と呼ばれる．スキルムは，強い相互作用のゲージ理論が確立される何年も前にこれらのソリトンを発見し，それらがバリオンの多くの性質をみたすことを示していた．ソリトンを解析するために，次の模型

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \frac{1}{4} f_\pi^2 \int d^4x \ \mathrm{Tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) + \frac{1}{32\epsilon^2} \mathrm{Tr}([\partial_\mu U U^{-1}, \partial_\nu U U^{-1}]^2) \\ - \frac{iN}{240\pi^2} \int_{\mathcal{D}} \mathrm{Tr}(dU\, U^{-1})^5\end{aligned} \tag{19.71}$$

を考えよう．新しく加えられた項はスキルム項と呼ばれる．ここで，ϵ は理論がもつもう 1 つの結合定数である．有効作用を考えているので，このような高次の微分を含む項は一般に許される．ここでは安定なスキルミオン解が実現されるような項を追加した．これ以外にも追加できる項はあるが，それらによって以下の議論の本質が変更されることはない．静的な配位のエネルギー汎関数は

$$\mathcal{E} = \int d^3x \left[\frac{1}{4} f_\pi^2 \mathrm{Tr}(\partial_i U \partial_i U^\dagger) - \frac{1}{32\epsilon^2} \mathrm{Tr}([\partial_i U U^{-1}, \partial_j U U^{-1}]^2) \right] \tag{19.72}$$

である．ヴェス–ズミノ項は時間微分について 1 次のオーダーであるので，ハミルトニアンに寄与しないことを思い出そう.（あるいは，この項は微分形式で定義されているので，計量によらず，そのためエネルギーに寄与しないことがわかる.）真空の配位に対しては，$U = 1$ となる．有限エネルギーの配位に対しては，$U(x)$ は $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ で真空値，すなわち 1 となる必要がある．空間の無限遠で U が恒等変換となるので，$U(x)$ はその結果 S^3 から $U(N_f)$ への写像を表す．そのような写像のホモトピー類は $\Pi_3[U(N_f)] = \Pi_3[SU(N_f)] = \mathbf{Z}$ で与えられ，これは巻き数

$$\begin{aligned} Q[U] &= -\frac{1}{24\pi^2} \int \mathrm{Tr}(U^{-1}dU)^3 \\ &= -\frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \; \epsilon^{ijk} \mathrm{Tr}(U^{-1}\partial_i U U^{-1} \partial_j U U^{-1} \partial_k U) \end{aligned} \tag{19.73}$$

で分類される．この巻き数はカレント

$$J^\mu = -\frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathrm{Tr}(U^{-1}\partial_\nu U U^{-1} \partial_\alpha U U^{-1} \partial_\beta U) \tag{19.74}$$

に関連する電荷であるとみなせる．このカレントの保存には運動方程式を必要としない．ゼロでない Q をもつ場の配位がソリトンあるいはスキルミオンである．場の配位の時間発展は Q を保存するので，Q がゼロでない配位はその値を保つ．この値が消える唯一の場合は,（巻き数 Q の）ソリトンと（巻き数 $-Q$ の）反ソリトンの対消滅が起きるときである．

ゼロでない Q の最も単純な写像は，S^3 から $SU(N_f)$ の $SU(2)$ 部分群への写像で与えられる．$N_f = 2$ のとき，球面対称な写像は次の形で与えられる．

$$U(x) = U_S(x) \equiv \exp\left(i\phi(r)\tau\cdot\hat{x}\right), \\ = \cos\phi(r) + i\tau\cdot\hat{x}\sin\phi(r) \tag{19.75}$$

ここで，τ_i はパウリ行列である．この配位が特異点を持たないためには，$\sin\phi(0) = 0 = \sin\phi(\infty)$ という境界条件が必要である．よって，$\phi(0)$ と $\phi(\infty)$ は π の整数倍の値をもつ．配位 (19.75) に対して，

$$Q = \frac{1}{\pi}\left[\phi(0) - \phi(\infty)\right] \tag{19.76}$$

とおける．$\phi(0) - \phi(\infty) = \pi$ とすると，巻き数 1 のスキルミオンが得られる．$Q = 1$ の配位は

$$\sin\phi = \frac{2Rr}{R^2 + r^2} \tag{19.77}$$

で与えられる．これは球面の $\mathbf{R^3}$ への立体射影 (stereographic projection) に対応している．

ソリトンの実体は位相幾何学的な考察では決まらない．(19.75) を試行関数として，静的な運動方程式（あるいはその変形）の解を求めることができる．ここでは有効理論を考えているので，多くの場合，変分的な解析で十分である．必要な境界条件をみたす $\phi(r)$ をスケール・パラメータ R を含む形で表し，これを使ってエネルギーを計算し，その極小化から R を求めることができる．(19.72) の第 1 項は次元 -1 をもち，第 2 項は次元 1 をもつ．したがって，エネルギーの一般形は

$$\mathcal{E} = af_\pi^2 R + \frac{b}{\epsilon^2 R} \tag{19.78}$$

となる．ただし，a, b は定数である．よって，R の最適値は $R = \sqrt{b/a\epsilon^2 f_\pi^2}$ となる．スキルム項がなければ，エネルギー的に好まれるソリトンの大きさはゼロとなり，ソリトンは収縮してなくなってしまうことに注意しよう．スキルム項はソリトンを安定化させるために導入された．この安定化のためには，次元が 1 以上となればどのような項をもちいてもよい．ここでのスキルム項は，その簡単な場合にすぎない．

スキルミオンをラージ N 極限のバリオンと同定するには，スキルミオンがバリオン数をもつフェルミオンであり，正しいフレーバーの性質をもつことを示さなければならない．つぎに，この点について考えてみよう．

19.4.3　スキルミオンのバリオン数

ソリトンのバリオン数を同定するには，理論をクォークと結合させ，バリオン数の演算子を定義しなければならない．そこで，有効作用に次の項を加えよう．

$$\mathcal{S}_Q = \bar{Q}(i\gamma\cdot\partial)Q - m\left(\bar{Q}_L U Q_R + \bar{Q}_R U^\dagger Q_L\right). \tag{19.79}$$

ただし，クォークの質量項も含めた．$SU(N)$ 対称性をもつ QCD では，クォークは $1/N$ のバリオン数をもつので，バリオン数の演算子は

$$B = \frac{1}{N}\int d^3x\ \bar{Q}\gamma^0 Q \tag{19.80}$$

と定義できる．よって，ソリトンのバリオン数を同定するには，ソリトン状態に対して B の期待値を計算すればよい．ここでソリトン状態とは背景となる U の値がソリトンの配位で与えられていることに対応する．したがって，

$$\begin{aligned}\langle B\rangle_S &= \frac{1}{N}\int d^3x\ \langle S|\bar{Q}\gamma^0 Q|S\rangle \\ &= -\frac{1}{N}\int d^3x\ \mathrm{Tr}\left[\gamma^0 S\left(x-\frac{\epsilon}{2}, x+\frac{\epsilon}{2}, U\right)\right]_{\epsilon\to 0}\end{aligned} \tag{19.81}$$

と計算できる．2 行目では，背景場 U のもとでのフェルミオン伝播関数の短距離極限をもちいてバリオン数を表した．短距離における振る舞いだけが必要なので，これは $1/m$ の級数展開で求めることができる．(クォークの質量項を導入したのはこのためである．)

伝播関数は方程式

$$(i\gamma\cdot\partial - mF)S(x,y) = i\delta^{(4)}(x-y) \tag{19.82}$$

に従う．ただし，$F = \frac{1}{2}[U(1-\gamma_5)+U^\dagger(1+\gamma_5)]$ である．この解は，$S(x,y) = -(i\gamma\cdot\partial + mF^\dagger)\,G(x,y)$ と書ける．ここで，G は

$$\left(\Box + m^2 - im\gamma\cdot(\partial F^\dagger)\right)G(x,y) = i\delta^{(4)}(x-y) \tag{19.83}$$

と定義される．上式で $FF^\dagger = 1$ と $\gamma_\mu F^\dagger = F\gamma_\mu$ の関係式をもちいた．次の積分方程式を繰り返しもちいて，G を $X = im\gamma\cdot\partial F^\dagger$ の級数で展開しよう．

$$G(x,y) = G_0(x,y) - i\int_z G_0(x,z)X(z)G(z,y),$$
$$G_0(x,y) = -i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}\exp[-ip(x-y)]. \tag{19.84}$$

これより，バリオン・カレントの期待値は次のように展開できる．

$$\begin{aligned}\langle J^\mu(x)\rangle &= \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(i\gamma\cdot\partial + mF^\dagger)G(x,y)\right]_{y\to x}\\ &= (-i)^3\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu mF^\dagger X\,X\,X\right]\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}\right]^4+\cdots\\ &= \frac{i}{96\pi^2}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu F^\dagger\gamma\cdot F^\dagger\gamma\cdot F^\dagger\gamma\cdot F^\dagger\right]+\cdots\\ &= -\frac{1}{24\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}(U^{-1}\partial_\nu UU^{-1}\partial_\alpha UU^{-1}\partial_\beta U)+\cdots.\end{aligned} \tag{19.85}$$

$1/N$ の因子はクォークの N 個のカラーについてのトレースによって相殺される．これ以外の項もカレントに寄与する．発散の可能性がある項は γ 行列と $SU(N_f)$ 代数のトレース恒等式をもちいるとゼロとなる．また，上式で 1 行目から 2 行目に移行する際に X の微分が含まれる項を無視したが，そのような項は余分な寄与を与える．ここで示した項は，巻き数 Q で与えられるバリオンの電荷を導く．Q の密度は閉じているが完全ではない 3-形式であり，$\mathcal{H}^3[SU(N_f)]$ の要素に属する．この項は一意的であるので，バリオン・カレントの保存が満たされるには，これ以外の $\langle J^\mu\rangle$ の項は，反対称テンソル $K^{\mu\nu}$ をもちいて $\partial_\nu K^{\mu\nu}$ の形で表されなければならない．電荷の式で積分を実行すると，これらの項はゼロとなる．したがって，上で導いたカレントには補正項が加わるものの，そのような項は電荷には影響を与えない．($\langle J^\mu\rangle$ の計算で，必要な項を 1 つだけしか導出しなかったのはこのためである．この導出の要点は，Q と同じだけのバリオン数が生成されることを示すことであり，カレントがこの項だけで表されるわけではない.）以上より，スキルミオンは巻き数で与えられるバリオン数をもつことがわかった．

19.4.4　スキルミオンのスピンとフレーバー

ソリトンのフレーバーとスピンの性質を議論するに当たり，ここでは単に $N_f=3$, $N=3$ としよう．(ただし，フレーバー数をこれより大きくとっても

本質的な違いはない.）以下の議論は基本的にウィッテンによるものである.

$N_f = 3$ のとき，ソリトンの配位 (19.75) は

$$U_S(x) = \begin{pmatrix} \exp(i\phi(r)\tau\cdot\hat{x}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19.86}$$

となる．この配位は $\boldsymbol{x}$ の回転のもとで不変ではないが，回転と τ で生成される $SU(2)$ 変換の組み合わせのもとで不変である．したがって，空間回転に対して $U_S \to GU_SG^\dagger$ と変換させる．ただし，G は

$$G = \begin{pmatrix} \exp(i\tau\cdot\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19.87}$$

の形で表される $SU(2)$ 変換である.

まず，理論は $SU_V(3) \times SU_J(2)$ 対称性をもつことに注意しよう．ここで，$SU_J(2)$ は回転の作用に対応する．ところが配位 (19.86) はこの理論の対称性を完全には保たない．量子論では配位 (19.86) の量子的な揺らぎが生じるが，そのなかには，（空間的に一定な）$SU_V(3) \times SU_J(2)$ 変換に対応する揺らぎが存在する．これは理論の対称性なので，静的なエネルギーの変化はない．よって，そのような変換のパラメータを時間に依存するものとし，これらのモードだけを残して (19.86) のまわりの揺らぎを量子化することができる．これはソリトンを半古典的に量子化するための第 1 ステップであり，そのスピンおよびフレーバーの性質を示すには十分である．フレーバーの回転変換を固定すると，ソリトンの試行関数は

$$U(x,t) = A(t)\,U_S\,A^\dagger(t) \tag{19.88}$$

となる．ここで，$A(t)$ は $SU(3)$ 行列である．このとき，対称性は次のように実現される.

$$A'(t) = VA(t)\,, \quad A'(t) = A(t)\,G. \tag{19.89}$$

ここで，$V \in SU_V(3)$ はフレーバーの対称性を与え，G はスピンあるいは回転変換を与える．これらの変換の無限小生成子である微分演算子を次のように定義することができる.

$$L_a\,A = t_a\,A, \quad R_a\,A = A\,t_a. \tag{19.90}$$

パラメータ φ^i をもちいて，$A=\exp(it_a\varphi^a)$ $(a,i=1,2,\ldots,8)$ と表すと，これらは

$$L_a=-i(E^{-1})^i_a\frac{\partial}{\partial\varphi^i},\quad R_a=-i(\tilde{E}^{-1})^i_a\frac{\partial}{\partial\varphi^i} \tag{19.91}$$

となる．ただし，

$$dAA^\dagger=-it_aE^a_id\varphi^i,\quad A^\dagger dA=-it_a\tilde{E}^a_id\varphi^i \tag{19.92}$$

である．

量子論を得るには，(19.89) を作用 (19.71) へ代入すればよいので，

$$\mathcal{S}=\int dt\left[-\frac{\alpha}{2}\{\mathrm{Tr}(t_iA^\dagger\partial_tA)\}^2-\frac{\beta}{2}\{\mathrm{Tr}(t_kA^\dagger\partial_tA)\}^2-i\frac{QN}{\sqrt{3}}\mathrm{Tr}(t_8A^\dagger\partial_tA)\right] \tag{19.93}$$

となる．ここで，t は $SU(3)$ 行列であり，その添え字 i,k は $i=1,2,3$，$k=4,5,6,7$ を表す．α と β は空間積分から生じる定数であり，その具体的な値はここでは重要ではない．$\mathrm{Tr}(t_8A^\dagger\partial_tA)$ の項は2次の形でないことに注意しよう．量子化の際，$\mathrm{Tr}(t_aA^\dagger\partial_tA)$ $(a=1,2,\ldots,7)$ の時間微分は L_a あるいは R_a の微分演算子に関係づけられる．波動関数は $SU(3)$ 行列 A の関数となり，さまざまな演算子の作用は L_a と R_a で定義される．しかし，$\mathrm{Tr}(t_8A^\dagger\partial_tA)$ については2次の項が存在しないので，この方向については正準運動量を求めることができない．$A\to A\exp(it_8\theta)$ の変換のもとで，作用は

$$\mathcal{S}(Ae^{it_8\theta})=\mathcal{S}+\frac{NQ}{2\sqrt{3}}\dot{\theta} \tag{19.94}$$

と変化する．これは波動関数が

$$\Psi(Ae^{it_8\theta})=\Psi(A)\exp\left(i\frac{NQ}{2\sqrt{3}}\theta\right) \tag{19.95}$$

という性質をもつことを意味している．これは許される波動関数に課される拘束条件である．(作用が (19.94) と変化する場合に，波動関数がこのような条件式をみたすという事実は，波動関数の経路積分表示を考えればすぐにわかる．)

一般に，波動関数は

$$\Psi(A)=C_R\,\mathcal{D}^R(A)_{I,I_3,Y;I',I'_3,Y'} \tag{19.96}$$

と書ける．ここで，$\mathcal{D}^R$ は表現 R に属する群の要素 A を表す行列であり，A の任意な関数で与えられる．($\mathcal{D}$ は $SU(3)$ に対するウィグナーの $\mathcal{D}$ 行列である．) C_R は規格化定数である．行列は次のように指定される．A に対する $SU(3)$ の左作用のうち $SU(2)$ 部分群に対応する 2 次のカシミール不変量を $L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = I(I+1)$ とする．I_3 は L_3 の固有値，Y は $(2/\sqrt{3})L_8$ の固有値である．(後者はハイパーチャージを与える．) I', I_3' と Y' は A の右作用に対応する量である．よって，$\mathcal{D}^R(A)_{I,I_3,Y;I',I_3',Y'}$ への作用に対して，$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = I'(I'+1)$, $R_3 = I_3'$ および $(2/\sqrt{3})R_8 = Y'$ となる．これらは $SU(3)$ の表現内で状態を指定するのに必要な量子数である．R_1, R_2, R_3 はソリトンの回転群を定義するので，$I' = J$ は量子論におけるソリトンのスピンを与えることに注意しよう．

拘束条件 (19.95) から，$N = 3$, $Q = 1$ のとき $Y' = 1$ と選ばなければならないことがわかる．$Y' = 1$ となる状態のうち $SU(3)$ の最低次元の表現は，随伴表現であるオクテット（8 重項状態）とデカプレット (10 重項状態）で与えられる．オクテットの場合，$Y' = 1$ となる状態は $I' = J = \frac{1}{2}$ をもつ．左側の添え字はオクテットであるフレーバー多重項状態を表す．ここで Y' が固定されているので，右側の添え字については，$I_3' = \pm\frac{1}{2}$ の 2 つの場合しかない．したがって，スピン $\frac{1}{2}$ のソリトン状態を表すオクテットを得る．デカプレットの場合，$I' = J = \frac{3}{2}$ であり，スピン $\frac{3}{2}$ のソリトンであるフレーバー・デカプレットが得られる．よって，この理論はバリオン数 1 のソリトンを導き，その低状態はスピン $\frac{1}{2}$ のオクテットとスピン $\frac{3}{2}$ のデカプレットで与えられる．これは 12 章で議論，考察したクォーク模型と完全に一致する．ソリトンは，ボソン場のコヒーレントな配位であるが，ヴェス–ズミノ項の効果のために，フェルミオンとみなせることがわかった．

フレーバー数が 2 のときは，$\mathcal{H}^5[SU(2)] = 0$ なので，ヴェス–ズミノ項は存在しない．ソリトンの配位は S^3 から $SU(2)$ への写像で与えられるので，$\Pi_1[\mathcal{C}] = \Pi_4[SU(2)] = \mathbf{Z}_2$ がわかる．ただし，$\mathcal{C}$ は配位空間の 1 つの成分を表す．よって，$\mathcal{C}$ は 2 価の波動関数で対応づけられ，フェルミオンの可能性が生じる．このことは，すでに何年も前にスキルムによって指摘された．$SU(3)$ へ拡張することで，この可能性が具体的に実現できる．また，$SU(2)$ の $SU(3)$ への埋め込みは，大域的な $SU(2)$ アノマリーについての以前の議論と類似し

ているので，その議論を修正してソリトンのフェルミオン的な性質を導くことができる．

ソリトン的な視点によるバリオンの性質は，これら以外にも数多く明らかにされている．また，標準模型におけるバリオンの補足的な描像を与える模型として，多くの論文でスキルム模型が研究されている．

まとめると，ラージ N 理論によって，粒子のスペクトルとして期待される特性がすべて再現されることがわかった．これは，$1/N$ 展開がゲージ理論の非摂動的な側面を解析する優れた手法であることをさらに支持するものである．

19.5　格子ゲージ理論

19.5.1　なぜ格子なのか

格子ゲージ理論は非アーベル型ゲージ理論の非摂動的な性質を探る非常に重要なアプローチである．この理論の基本的なアイデアは次のとおりである．場の量子論はユークリッド化された汎関数積分で記述される．この積分を定義するには，まず有限な数のモードで切断された理論を考え，つぎに有限次元の積分を計算し，そしてモードの数を無限にする極限をとる，という手順をとらなければならない．格子をもちいたアプローチでは，有限のモードへの切断が理論を有限の格子上で考えることでなされる．この格子には大抵，簡単のため，適切な次元をもつ立方格子がもちいられる．よって，4 次元では，4 次元の超立方格子 (hypercubic lattice) を考える．このとき，それぞれの方向に沿って格子間隔が a となる M 個の格子点があるとしよう．場の変数は格子点あるいは格子点を結ぶリンク (link) に位置する．そのため，場の変数の総数は M^4 に比例し，有限となる．2 つの格子点間の最短距離は a なので，紫外発散は存在せず，a がカットオフ・パラメータの役割を果たす．対象となる連続理論は，$M \to \infty$, $a \to 0$ の極限で得られる．この極限を取り出すには，場と結合定数の再スケーリングおよびパラメータの繰り込みが必要となる．この極限をとることで 4 次元ユークリッド不変性も回復される．

このアプローチが重要な理由はいくつかある．理論的な側面から言うと，

格子上の理論によって，汎関数積分と相関関数が数学的に問題なく定義されるので，これは完全に非摂動的な意味で場の理論が存在するかどうかといった疑問を解明するためのよい出発点を与える．これは構成法的な場の理論における手法であり，実際，これにより，4 次元の ϕ^4 理論がその摂動計算の高い有用性にもかかわらず自明となりうることが議論された.（基本的にこれは，裸のパラメータが $a \to 0$ で有限であるような裸の理論を格子上で定式化すると，その連続理論が自由場の理論になるということを述べている.）

より実用的な側面から言うと，汎関数積分を有限次元の積分に切断することは (M, a) の値に対して積分を数値的に評価できることを示している．よって，この結果を $M \to \infty$, $a \to 0$ の連続極限にまで外挿し，物理量を数値的に求めることができる．本質的に，これは非摂動的なアプローチであり，電子計算機の能力向上とともに，その実用性は益々高まっている．格子上ではゲージ不変性が明らかなゲージ理論を構成できるので，このアプローチは特にゲージ理論において有用である．実際に，格子上での物理量を定式化し，それらを計算するには，多くの解析的な分析がさらに必要である．また，計算機を使ってこれらの計算を実行するためには，多くの特別な数値アルゴリズムを開発しなければならない．これについては，長年にわたる幅広い研究結果が蓄積されている．現在では，閉じ込め効果や有限温度における非閉じ込め相への転移などといったゲージ理論全般の定性的な特徴の多くが，理論的に信頼できる手法で解析されている．また，グルーボールの質量を求める計算も行われている．

この節では，対称性が自発的に破れない理論をもちいて，格子ゲージ理論の最も基本的な性質を復習しよう．

19.5.2 プラケットとウィルソン作用

ゲージ場の基本的な変数は隣接した格子点を結ぶリンク上で定義される．$SU(N)$ ゲージ理論に対して，これらは $SU(N)$ のリー群の要素で与えられる．これを $U(x+\mu, x)$ で表そう．ここで，x は格子点であり，この点から（大きさ a の）格子ベクトルの要素分だけ μ の方向へ並進して得られる隣接

格子点が $x+\mu$ である．ここで U を $SU(N)$ の基本表現にとり，$(N\times N)$ 行列とみなすことができる．このとき，立方格子上で単位格子の面を考えることができる．その一例として，$x, x+\mu, x+\mu+\nu, x+\nu$ を頂点にもつ正方形をとることができる．この単位格子の面はプラケット (plaquette) と呼ばれる．(格子で作られる任意の曲面はこのプラケットで構成することができる.）プラケットのまわりの U について積をとると，その積のトレースで作用は定義される．プラケット変数を

$$\begin{aligned} W_P(x) &= W(x, x+\mu, x+\mu+\nu, x+\nu) \\ &= \mathrm{Tr}\Big[U(x, x+\nu)\, U(x+\nu, x+\mu+\nu) \\ &\qquad U(x+\mu+\nu, x+\mu)\, U(x+\mu, x)\Big] \end{aligned} \tag{19.97}$$

と定義しよう．このとき，ウィルソンによって初めて与えられたゲージ理論についての最も簡単な格子作用は

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \beta \sum_P \left[1 - \frac{1}{N}\,\mathrm{Re}\, W_P(x)\right] \\ &= \beta \sum_P 1 + \mathcal{S}', \\ \mathcal{S}' &= -\frac{\beta}{N} \sum_P \mathrm{Re}\, W_P(x) \end{aligned} \tag{19.98}$$

となる．和は格子上のすべてのプラケット P についてとられ，β は $\beta = 2N/e_0^2$ であり，裸の結合定数 e_0 と関係づけられる．

ゲージ変換は $SU(N)$ の値をもつ関数であり，格子点で定義される．したがって，ゲージ変換のもとで

$$U(x+\mu, x) \to U^g(x+\mu, x) = g(x+\mu)\, U(x+\mu, x)\, g^\dagger(x) \tag{19.99}$$

となる．ただし，$g \in SU(N)$ である．$W_P(x)$ はこの変換のもとで不変であり，作用 (19.98) も同様に不変である．

連続理論との関係は次のようになる．$U(x+\mu, x)$ は格子上の平行移動行列である．(これは，変換則 (19.99) から明らかであろう.）格子間隔が小さいとき，ゲージポテンシャルは

$$U(x+\mu,x) \approx P\exp\left[i\int_x^{x+\mu} t^a A_\mu^a \, dx^\mu\right] \tag{19.100}$$

と定義できる．よって，$W_P(x)$ はウィルソン・ループ演算子であり，そのループはプラケット P の境界に対応するので

$$W_P(x) \approx \mathrm{Tr}\left[e^{\frac{i}{2}t^a F_{\mu\nu}^a \sigma^{\mu\nu}}\right] \tag{19.101}$$

となる．$\sigma^{\mu\nu}$ はプラケットの面積であり，上式は小さい面積あるいは $a \to 0$ のときに有効である．したがって，

$$\mathcal{S} \approx \int d^4x \; \frac{1}{4e_0^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \tag{19.102}$$

となることがわかる．a^4 の因子を含むプラケットの和はユークリッド時空間の積分となる．式 (19.102) が連続作用と一致することから，(19.98) が確かにヤン–ミルズ理論に対応していることがわかる．この極限はしばしば素朴な連続極限と呼ばれる．というのも，理論の実際の連続極限は汎関数積分で定義され，$M \to \infty$, $a \to 0$ の極限をとってこれを考えると非常に異なる振る舞いが与えられるかもしれないためである．

汎関数積分は

$$Z = \int \prod_{\text{リンク}} d\mu(U) \, \exp(-\mathcal{S}) \tag{19.103}$$

で定義される．ここで，各リンクに対する $d\mu(U)$ は $SU(N)$ 群のハール測度である．この測度は次のように定義される．$SU(N)$ を微分多様体とみなすと，そのカルタン–キリング計量は

$$ds^2 = -2\,\mathrm{Tr}(U^{-1}dU)^2 = E_i^a E_j^a d\varphi^i d\varphi^j \tag{19.104}$$

で与えられる．ここで，$U^{-1}dU = -it^a E_i^a(\varphi)d\varphi^i$ であり，φ^i は U についての群のパラメータである．例えば，$U = \exp(-it^a\varphi^a)$ とおける．（上式では，ウェッジ積ではなく，対称的な積がとられている．）(19.104) に対応する体積要素は

$$d\mu(U) = (\det E)\prod_i d\varphi^i \tag{19.105}$$

である．これが群のハール測度である．

$d\mu(U)$ には有用な次の 2 つの性質がある．

1.
$$vol[SU(N)] = \int d\mu(U) \tag{19.106}$$
で定義される群の総体積は有限である.

2. 表現行列はハール測度について直交系を成す. すなわち,
$$\int d\mu(U)\ \mathcal{D}^{(R)}_{AB}(U^\dagger)\mathcal{D}^{(R')}_{\alpha\beta}(U) = \frac{vol[SU(N)]}{dim\, R}\delta^{RR'}\delta_{B\alpha}\delta_{A\beta} \tag{19.107}$$
である. ただし, $\mathcal{D}^{(R)}_{AB}(U)$ は既約表現 R に属する群の要素 U についての行列表現である. A, B は $1, 2, \ldots, dim\, R$ の値をとる. また, α, β は $1, 2, \ldots, dim\, R'$ の値をとる. (これらは $SU(N)$ に対するウィグナーの $\mathcal{D}$ 関数である.)

汎関数積分 (19.103) において, すべての U について積分すると, ゲージ変換に対応する配位空間上の方向についても積分されることとなる. 格子点の数は有限なので, これは発散量を与えず, 期待値はこのゲージ変換に対応する体積を差し引いて求められる.

強結合展開

積分 (19.103) の全体積は有限なので, ベキ指数を $\mathcal{S}'$ の級数として $\exp(-\mathcal{S}) = \exp(-\beta\sum_P 1)\exp(-\mathcal{S}')$ と展開できる. 展開項のそれぞれについて積分を評価すると, $1/e_0^2$ の級数展開が得られる. これは強結合展開と呼ばれ, 先験的には, e_0 が大きく, a が固定された場合に適用できると思われる. e_0 はカットオフ a の格子における裸の結合定数であるので, この展開式は距離スケールが a のオーダーであるときに有効である. 漸近的自由性から, 有効結合定数は電荷間距離が増すほど大きくなるので, 格子間隔が $a \to 0$ となる極限で有限な結合定数を得るには, e_0 を小さく調整しなければならない. したがって, 強結合展開は $a \to 0$ となる連続極限では適当でない. それにもかかわらず, この展開式から興味深い特徴を引き出すことができる.

指数関数を展開すると, 最低次の項は定数 $\int \prod_{\text{リンク}} d\mu(U) = \{vol[SU(N)]\}^{n_L}$ を与える. ここで, n_L はリンクの総数である. 次の項は $\int d\mu(U)\ \mathcal{S}'$ の形で与えられ, $\int dU(x+\mu, x)\ U(x+\mu, x)$ といった積分が現れる. これは, (19.107)

からゼロである．したがって，$\int d\mu(U)\mathcal{S}' = 0$ である．ゼロでない値を得るには，被積分関数に $U(x+\mu, x)$ とその共役 $U(x, x+\mu)$ の積が現れなければならない．これは，辺 $(x+\mu, x)$ を共通にもつ隣接したプラケット，例えば $(x, x+\mu, x+\mu+\nu, x+\nu)$ と $(x, x+\mu, x+\mu+\alpha, x+\alpha)$ のプラケット，についての W_P の積で与えられる．このとき，(19.107) をもちいると，$U(x+\mu, x)$ 上での積分により $U(x+\mu, x)U(x, x+\mu)$ は定数となり，2 つのプラケットを共通の辺 $(x+\mu, x)$ でくっつけた曲面が現れ，この曲面の境界に沿ったウィルソン・ループが残る．$\int d\mu(U)\mathcal{S}'^2$ では，$\mathcal{S}'$ の 1 つが $U(x+\mu, x)$ に寄与し，もう 1 つが $U(x, x+\mu)$ を与えるような場合に，このようなことが起こる．ただ，$\int d\mu(U)\mathcal{S}'^2$ はまだゼロのままである．というのも，ペアとなる共役な要素をもたないリンク変数についての積分が残るためである．この考えを繰り返すと，すべてのリンク変数について共役な要素を得る唯一の場合は，考えているプラケットが閉曲面 Σ を覆うときであることが簡単にわかる．閉曲面上の各プラケットについて W_P の因子が現れる．これは，指数関数を展開したときの $\mathcal{S}'$ に含まれる対応する因子に起因している．プラケットの境界が他のプラケットと一致することでリンク変数の対が与えられる．この場合，積分は $\{1/e_0^2\}^{n(\Sigma)} \sim \exp[n(\Sigma) \times (\text{定数})]$ に比例する．ただし，$n(\Sigma)$ は閉曲面 Σ に対するプラケットの数である．したがって，汎関数積分は閉曲面についてのある種の和で表される．その重みはプラケットの数あるいは閉曲面の面積に比例する作用によって決まる．ここで扱う曲面は必ずしも単純である必要はない．例えば，同じリンク変数を共有していながら，面が何重にも重なるような曲面を考えてもよい．そういったことはあるにせよ，この構造は汎関数積分が曲面についての和で与えられる弦理論を思い起こさせる．

格子上の曲線 C は一連のリンク $l_1, l_2, \ldots, l_K$ で形成されると考えられる．また，C に沿ったウィルソン・ループ演算子はこれらのリンク 1 つ 1 つに沿った U の積で定義される．よって，

$$W_C = \mathrm{Tr}\,(U_{l_1} U_{l_2} \cdots U_{l_K}) \tag{19.108}$$

となる．強結合展開では，ウィルソン・ループの期待値が面積則を与えることを見ることができる．まず，

$$\langle W_C \rangle = \int d\mu(U)\, W_C\, e^{-\mathcal{S}} \tag{19.109}$$

を考えよう．ここで，U の対を作りゼロでない値を得るには，$e^{-\mathcal{S}}$ の展開項の U とウィルソン・ループの U を組み合わせればよいことがわかる．よって，積分は境界が C の開曲面についての和で表せる．この曲面を覆うプラケットの最小数は，境界 C をもつ曲面の最小面積に比例するので，ウィルソン・ループの振る舞いは

$$\langle W_C \rangle \sim \exp\left(-\frac{\mathcal{A}(C)}{a^2}\log e_0^2\right) \tag{19.110}$$

となることがわかる．これは面積則である．しかし，上式は強結合展開による結果であり，$a \to 0$ における閉じ込めについての議論を与えるものではない．一般的には，力学的な理由から，連続極限でもこの振る舞いが持続すると期待されている．

19.5.3　フェルミ粒子の重複問題

格子上の物質場も簡単に導入することができる．物質場は格子点に関係づけられるので，スカラー場のときは，場の変数 $\phi(x)$ を各格子点 x に導入できる．このとき，微分は

$$\partial_\mu \phi \equiv \frac{\phi(x+\mu) - \phi(x)}{a} \tag{19.111}$$

で定義できる．よって，作用は

$$\mathcal{S} = \sum_{\text{格子点}} a^4 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\phi(x+\mu) - \phi(x)}{a}\right)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2(x) + \lambda\phi^4(x)\right] \tag{19.112}$$

の形で書ける．a が小さい極限で，これは連続的な作用

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \lambda\phi^4\right] \tag{19.113}$$

になる．

フェルミ粒子の場合も同様な手続きをふむことができるが，この場合には，いわゆるフェルミ粒子の重複問題 (doubling problem) が起きる．フェルミオンに対する格子作用が，局所的な相互作用，ハミルトニアンのエルミート性，

さらに格子上の並進対称性をもつ場合，その連続極限の理論は互いに反対のカイラリティをもったフェルミオンの対をもち，フェルミオン場の数は偶数となる．これは，標準模型のようにカイラルな連続理論を格子理論から求めるには，上で与えた条件のどれかを諦めなければならないことを意味する．

この重複問題は空間次元が 1 次元の無質量フェルミ粒子を考えると，簡単に説明できる．ここでは，ハミルトニアン形式をもちいよう．まず，連続理論を考えよう．この場合，ディラック方程式は

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\sigma_3\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{19.114}$$

となる．ここで，γ 行列を $\gamma^0 = \sigma_1, \gamma^1 = i\sigma_2$ とし，カイラリティ演算子を $-\gamma^0\gamma^1 = \sigma_3$ にとる．カイラリティが左のとき，ディラック方程式は

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{19.115}$$

となるので，$\psi \sim \exp(-ip_0t + ipx)$ を代入すると $p_0 = -p$ が得られる．したがって，p の値が負のとき，エネルギーが正の解 $p_0 = \omega_p = |p|$ が導かれる．量子化すると，これらは粒子の消滅演算子に関係づけられる．また，これらは直線上で左に運動するモードであることに注意しよう．p が正のとき，$p_0 = -\omega_p = -p$ は生成演算子に関係づけられる．カイラリティが右の場合，p が正あるいは右に運動するとき，$p_0 = p$ となり，これは粒子の消滅に対応する．したがって，左右のカイラリティと粒子の運動に関する左右のモードには相関がある．

つぎに，格子上でカイラリティを例えば右に固定して考えよう．時間を連続変数のままにとると，予想される方程式は

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\left(\frac{\psi(x+a) - \psi(x)}{a}\right) = 0 \tag{19.116}$$

の形に書ける．この第 2 項はハミルトニアン演算子で表すと $-i\sum_x \psi^\dagger(x)[\psi(x+a) - \psi(x)]$ の項に対応する．これはそれ自身ではエルミートではない．$a \to 0$ の極限で空間部分について 1 次のオーダーの項となり，さらにエルミートである項は $\sum_x \frac{1}{2}\{-i\psi^\dagger(x)[\psi(x+a) - \psi(x)] + \mathrm{h.c.}\}$ で与えられる．これをもちいると，上式は

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\left(\frac{\psi(x+a) - \psi(x-a)}{2a}\right) = 0 \tag{19.117}$$

となる．そこで，次のモード展開を導入して，上式を解いてみよう．

$$\psi(x) = \sum_p e^{-ip_0 t + ipx} a_p. \tag{19.118}$$

格子上では周期的な境界条件を課すのが最も便利である．よって，格子の長さが Ma のとき，$\psi(x + Ma) = \psi(x)$ がみたされるとしよう．これより，p の値として $2\pi n/Ma$（n は整数）が可能となる．x は a の整数倍で与えられるので，$\exp(ip_{M+n}x) = \exp(ip_n x + 2\pi i x/a) = \exp(ip_n x)$ となる．したがって，独立なモード数は M だけとなり，これは

$$p_n = \frac{2\pi n}{Ma}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{M-1}{2} \tag{19.119}$$

と表せる.（ここでは簡単のため M を奇数とする.）点 $\pm(M-1)/2$ はブリュアン域 (Brillouin zone) の境界点であり，格子上で可能な $|p|$ の最大値を与える．モード展開 (19.118) をディラック方程式 (19.117) にもちいると，

$$p_0 = \frac{\sin(pa)}{a} \tag{19.120}$$

を得る．$n = 0$ 近傍のモードでは p は小さくなり，$a \to 0$ の極限で $p_0 = p$ となる．これは右巻きのカイラリティの無質量モードに対応している．ブリュアン域の境界付近でのモードを考えることもできる．$(M-1)/2$ 近傍のモードは，$p = (2\pi/Ma)(M-1)/2 - \tilde{p}$ $(\tilde{p} \geq 0)$ と書ける．よって，$M \to \infty$ で $\sin pa = \sin \tilde{p}a$ となる．これより，$M \to \infty$, $a \to 0$ における別のモード $p_0 = \tilde{p}$ が導かれる．これをモード展開で表すと

$$\psi(x) \sim e^{i\pi x/a} \sum_{\tilde{p}} \exp(-i\tilde{p}t - i\tilde{p}x)\, a_{\tilde{p}} \tag{19.121}$$

となる．よって，$e^{-i\pi x/a}\psi(x)$ は連続極限で運動量が $-\tilde{p}$ および $p_0 = \tilde{p}$ となるモードを持つもう 1 つの場を表す．つまり，これはカイラリティが左の場の一部である．この場の残りの半分のモードは $-(M-1)/2$ 近傍から得られる．このモードは $M \to \infty$ で $pa \approx -\pi + \tilde{p}a$ と表せる．この場合，運動量は $\tilde{p}$ さらに $p_0 = -\tilde{p}$ となり，再び左巻きのカイラリティが得られる．したがって，純粋に右巻きのカイラリティをもつと思われる格子上の場から出発しても，ブリュアン域の境界付近におけるモードの寄与のために $M \to \infty$,

$a \to 0$ の極限で，左右両方のカイラリティが現れることがわかる．フェルミ粒子の重複問題の本質はここにある．

この結果はきわめて一般的なものである．この結果は時間方向について格子化した作用をもちいても同様に構成できる．また，任意の方向について左右のカイラリティが得られるので，4 次元の場合は $2^4 = 16$ 倍の因子が現れる．この重複問題の一般化はニールセン–二宮の定理として知られている．格子上でディラック場が満たす方程式を

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_y H(x-y)\psi(y) \tag{19.122}$$

とする．このとき，格子理論に次の 3 つの条件を課すことを考えよう．

1. 理論は局所的である．これは $|x-y| \to \infty$ の極限でハミルトニアンがゼロとなることを意味する．この要請がなければ，H のフーリエ変換が連続的な 1 次の微分をもたない．
2. 作用とハミルトニアンは，格子ベクトルの並進変換に対する並進対称性をもつ．
3. x, y を行列要素の添え字とすると，ハミルトニアン $H(x-y)$ は行列とみなせるが，この行列はエルミート行列（あるいは作用が実行列）でなければならない．

ニールセン–二宮の定理によると，フェルミ粒子の格子理論がこの 3 つの条件をみたすとき，$M \to \infty$, $a \to 0$ の極限でフェルミ粒子のモードに左右のカイラリティが対になって現れる．

この理論は，カイラルフェルミオンの格子理論を構成するのが困難であることを示している．つまり，その構成のためには理論の 3 つの前提条件のうちの 1 つを諦めなければならない．格子上でカイラル理論を構成する手法がこれまで多く提案されてきた．標準模型への応用や QCD におけるカイラル対称性の破れを研究する上でこれらの手法は非常に重要であるが，一般にその計算は飛躍的に複雑になることが知られている．このような課題について完全に力学的な数値計算を行うには，現在の計算機能力ではまだ不十分である．

参考文献

1. クォークの閉じ込め機構を双対超伝導として理解できることを示したのは Y. Nambu, in Phys. Rep. **23**, 250 (1976) による．また，このアイデアは次の文献で発展された．G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B138**, 1 (1978); *ibid.* **B153**, 141 (1979); S. Mandelstam, Phys. Lett. **B53**, 476 (1975); Phys. Rev. **D19**, 2391 (1979).

2. ウィルソン・ループおよび閉じ込めの面積則は K.G. Wilson, Phys. Rev. **D14**, 2455 (1974) による．

3. トポロジカル渦糸については A.A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP **5**, 1174 (1957); H.B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. **B61**, 45 (1973) を参照されたい．

4. $T(C')$ 演算子とその代数については文献 1 の't Hooft の論文に載っている．

5. 非アーベル型ゲージ理論の磁気双極子は G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B79**, 276 (1974); A.M. Polyakov, JETP Lett. **20**, 194 (1974) で得られた．この研究課題はその後大きく発展した．その一般的な結果は次の文献にまとめられている．*Monopoles in Quantum Field Theory*, Proceedings of the Monopole Meeting, Trieste, P. Goddard, W. Nahm and N.S. Craigie (eds.), World Scientific Pub. Co. (1982); A. Jaffe and C. Taubes, *Vortices and Monopoles*, Birkhauser (1980).

6. $\mathcal{N}=2$ 超対称ゲージ理論では，その真空構造について厳密な解析が可能である．これについては N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. **B426**, 19 (1994) を参照されたい．この分野には多くの進展が見られた．最近のレビューとしては M. Strassler, in *Trieste 2001: Superstrings and Related Matters*, Abdus Salam ICTP, Trieste (2001) を参照されたい．

7. ゲージ理論の $1/N$ 展開は G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B72**, 461 (1974); *ibid.* **B75**, 461 (1974) で導入された．

8. ラージ N 極限でのカイラル対称性の破れについての議論は S. Coleman and E. Witten, Phys. Rev. Lett. **45**, 100 (1980) による．

9. アノマリー一致の条件は G. 't Hooft, Cargèse Lectures, 1979, reprinted in G. 't Hooft, *Under the Spell of the Gauge Principle*, World Scientific Pub. Co. (1994) で与えられている．これについては，次の論文も参照されたい．S. Coleman and B. Grossman, Nucl. Phys. **B203**, 205 (1982).

10. ヴァッファ–ウィッテンの定理は C. Vafa and E. Witten, Phys. Rev. Lett. **53**, 535 (1984); Nucl. Phys. **B234**, 173 (1984); Commun. Math. Phys. **95**, 257 (1984) による．

11. ラージ N 極限において，グルーボールとメソンの崩壊が抑制されることおよびバリオンがソリトンとして振る舞うことは E. Witten, Nucl. Phys. **B160**, 57 (1979) で示された．

12. スキルミオンの初期の研究についての一般文献は以下のとおりである．

T.H.R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. **A260**, 127 (1961); Nucl. Phys. **31**, 556 (1962); J. Math. Phys. **12**, 1735 (1970); J.G. Williams, J. Math. Phys. **11**, 2611 (1970); N.K. Pak and H.Ch. Tze, Ann. Phys. **117**, 164 (1979).

13. バリオン数の計算は A.P. Balachandran, V.P. Nair, S.G. Rajeev and A. Stern, Phys. Rev. Lett. **49**, 1124 (1982); Phys. Rev. **D27**, 1153 (1983) による．

14. スキルミオンのスピンとフレーバーについての解析，さらにはそのフェルミ粒子的特性の証明は E. Witten, Nucl. Phys. **B223**, 422, 433 (1983) による．また，G. Adkins, C. Nappi and E. Witten, Nucl. Phys. **B228**, 552 (1983) も参照されたい．本章の解析は次の論文に従った．A.P. Balachandran, F. Lizzi, V.G.J. Rodgers and A. Stern, Nucl. Phys. **B256**, 525 (1985).

15. バリオンに対するソリトン的なアプローチのレビューとして，I. Zahed and G.E. Brown, Phys. Rep. **142**, 1 (1986); A.P. Balachandran, *Classical Topology and Quantum States*, World Scientific Pub. Co. (1991) がある．

16. 格子ゲージ理論の発展的な内容については次の教科書が有用である．M. Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge University Press (1985); C. Itzykson and J-M. Drouffe, *Statistical Field Theory*, volumes 1 and 2, Cambridge University Press (1991); H.J. Rothe, *Lattice Gauge Theories: An Introduction*, World Scientific Pub. Co. (1998).

17. フェルミ粒子の重複問題についての定理は次の論文による．H.B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. **B185**, 20 (1981); Erratum *ibid.* **B195**, 541 (1982); *ibid.* **B193**, 173 (1981); Phys. Lett. **B105**, 219 (1981). 格子上のカイラルフェルミオンに関する新しい方向性（例えば，D. Kaplan のドメイン壁をもちいたアプローチや H. Neuberger と R. Narayanan によるオーバーラップ形式など）については最近のレビュー M. Creutz, Rev. Mod. Phys. **73**, 119 (2001) を参照されたい．

第 20 章

幾何学的量子化入門

この章では，特別に幾何学的量子化について議論する．前半部分は正準量子化について扱った 3 章と内容が重複する．15 章では経路積分の視点から量子化に際して現れる位相幾何学的（トポロジカル）な問題について考えたが，本章では，正準量子化の視点から量子化のトポロジカルな特徴について議論する．後半では，力学と場の理論についての応用例をいくつか与える．特に，ゲージ理論の配位空間についての議論は 16 章の内容とかなり重複するが，正準形式の枠組みでどのように理解できるかを示すため，一部の繰り返しも含めて再度取り上げた．

20.1　一般的な構造

1．シンプレクティック形式，正準変換，ポアソン括弧

まず，シンプレクティック構造の言葉で理論を定式化しよう．作用による定式化との関係については後で議論する．

古典物理学の解析的な定式化では，相空間 —— すなわち，シンプレクティック構造 Ω をもつ偶数次元のなめらかな多様体 $\mathcal{M}$ —— から出発する．Ω は $\mathcal{M}$ 上の非縮退な微分 2-閉形式である．これは，$d\Omega = 0$ であり，さらに $\mathcal{M}$ 上の任意のベクトル場 ξ に対して，$i_\xi \Omega = 0$ であれば ξ でなければならないことを意味している．$\mathcal{M}$ 上の局所座標 q^μ をもちいると，

$$\Omega = \frac{1}{2}\,\Omega_{\mu\nu}\,dq^\mu \wedge dq^\nu \tag{20.1}$$

と書ける．このとき，条件 $d\Omega = 0$ は

$$d\Omega = \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha}\, dq^\alpha \wedge dq^\mu \wedge dq^\nu$$
$$= \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial \Omega_{\alpha\mu}}{\partial q^\nu} + \frac{\partial \Omega_{\nu\alpha}}{\partial q^\mu}\right] dq^\alpha \wedge dq^\mu \wedge dq^\nu$$
$$= 0 \tag{20.2}$$

となる．Ω のベクトル場 $\xi = \xi^\mu(\partial/\partial q^\mu)$ との内部縮約は[1]

$$i_\xi \Omega = \xi^\mu \Omega_{\mu\nu} dq^\nu \tag{20.3}$$

で与えられる．これがゼロになる条件が $\xi^\mu \Omega_{\mu\nu} = 0$ であるので，Ω が縮退している場合，$\Omega_{\mu\nu}$ を行列とみなすと，この行列はゼロモード ξ^μ をもつ．したがって，Ω が非縮退であることは $\Omega_{\mu\nu}$ を行列とみなしたとき，この行列が可逆であることと同じである．必要であれば，$\Omega_{\mu\nu}$ の逆元を $\Omega^{\mu\nu}$ と表すこととする．すなわち，

$$\Omega_{\mu\nu}\, \Omega^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha \tag{20.4}$$

である．(ここでは非縮退な Ω を考える．もし Ω がゼロモードをもつ場合，変数に制約を課すことでこれを除去しなければならない．あるいは，Ω をゼロモードのないより小さな空間に射影して，この小さな空間をもちいて量子論を構成する必要がある．ゲージ理論ではこのような場合が起きる．一般に，Ω のゼロモードはゲージ対称性の存在を意味する.)

Ω が定義された $\mathcal{M}$ はシンプレクティック多様体と呼ばれる．

Ω は閉形式なので，少なくとも局所的には

$$\Omega = d\mathcal{A} \tag{20.5}$$

と書ける．このように定義された 1-形式は正準 1-形式あるいはシンプレクティック・ポテンシャルと呼ばれる．$\mathcal{A}$ の定義は一意には決まらない．というのも，$\mathcal{M}$ 上の任意の関数 Λ に対して $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A} + d\Lambda$ が同じ Ω を導くためである．すぐにわかるように，これは正準変換の自由度に対応している．

この段階ですでに，相空間のトポロジーに関する 2 種類の特徴を見出すこ

---

[1] ［訳註］内部縮約 (interior contraction) の定義については 14.1 節を参照されたい．

とができる．相空間 $\mathcal{M}$ が非自明な 2 次のコホモロジーをもつとき，つまり $\mathcal{H}^2(\mathcal{M}) \neq 0$ の場合，大域的に定義されないポテンシャルをもつような Ω を選ぶことが可能になる．後でみるように，作用は $\mathcal{A}$ の積分と関係づけられるので，Ω が $\mathcal{M}$ の非自明なコホモロジー類に属すとすると，作用の定義には補助的な変数あるいは次元が必要となる．物理ではそのような場合が実際にあり，これは 17 章で議論したヴェス–ズミノ項に対応している．直感的には，これはアノマリーあるいはまた観測量の代数の中心拡大（およびその他の拡大）に関係している．

たとえ $\mathcal{H}^2(\mathcal{M}) = 0$ であっても，$\mathcal{A}$ を定義するにはトポロジカルな問題が生じる．$\mathcal{H}^1(\mathcal{M}) \neq 0$ である場合，$\mathcal{H}^1(\mathcal{M})$ の要素分だけ異なる $\mathcal{A}$ をいくつも選ぶことができる．これらは同じ Ω を導く異なる $\mathcal{A}$ である．$\mathcal{M}$ 上の非可縮な閉じた曲線に沿った $\mathcal{A}$ の積分を考えることができる．この積分の値あるいはホロノミーは真空角と呼ばれ，量子論において重要である．非アーベル型ゲージ理論の標準的な θ 真空はこの例である．これらのトポロジカルな問題については後で詳しく議論する．

上で定義された幾何学的な構造が与えられたとすると，Ω を保存するような変換は明らかに特別である．これらは，正準変換と呼ばれる．言い換えると，正準変換は Ω を保存するような $\mathcal{M}$ の微分同相写像である．無限小の正準変換はベクトル場 ξ で生成され，$L_\xi \Omega = 0$ をみたす．ここで，L_ξ は ξ についてのリー微分である．つまり，

$$\begin{aligned} L_\xi \Omega &\equiv (d\, i_\xi + i_\xi\, d)\, \Omega \\ &= d\,(i_\xi \Omega) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{20.6}$$

である．ただし，Ω が閉形式であることをもちいた．これより，正準変換の場合，$i_\xi \Omega$ は閉形式であることがわかる．$\mathcal{M}$ の 1 次のコホモロジーが自明であれば，$\mathcal{M}$ 上の関数 f をもちいて

$$i_\xi \Omega = -df \tag{20.7}$$

と書ける．すなわち，無限小の正準変換のそれぞれについて，$\mathcal{M}$ 上の関数を関連づけることができる．$\mathcal{H}^1(\mathcal{M}) \neq 0$ のとき，変換 ξ に対応する $i_\xi \Omega$ が

$\mathcal{H}^1(\mathcal{M})$ の非自明な要素となるような場合があるので，この変換についての関数 f を大域的に定義できない．前述のとおり，これは量子論における真空角に関係している．ここでは，しばらく $\mathcal{H}^1(\mathcal{M}) = 0$ の場合を考えよう．関係式

$$\xi^\mu = \Omega^{\mu\nu}\partial_\nu f \tag{20.8}$$

をもちいると，関数 f に対して常にベクトル場を対応づけることができることに注意しよう．したがって，$\mathcal{H}^1(\mathcal{M}) = 0$ のとき，$\mathcal{M}$ 上の関数と無限小の正準変換を生成するベクトル場は 1 対 1 に対応している．この無限小正準変換に対応するベクトル場はしばしばハミルトン・ベクトル場 (Hamiltonian vector field) と呼ばれる．また，(20.7) で定義される関数 f はこのベクトル場に対応する正準変換の母関数と呼ばれる．

ξ, η を 2 つのハミルトン・ベクトル場としよう．つまり，$L_\xi \Omega = L_\eta \Omega = 0$ である．これらに対応する母関数をそれぞれ f, g としよう．$L_\xi L_\eta - L_\eta L_\xi = L_{[\xi,\eta]}$ であるので，このように定義された ξ と η のリー括弧 (Lie bracket) もハミルトン・ベクトル場である．局所座標をもちいると，ξ と η のリー括弧は

$$[\xi, \eta]^\mu = \xi^\nu \partial_\nu \eta^\mu - \eta^\nu \partial_\nu \xi^\mu \tag{20.9}$$

で与えられる．したがって，$[\xi, \eta]$ に対応する関数がなければならない．これは g と f のポアソン括弧と呼ばれ，$\{g, f\}$ で表される．(ここではマイナス符号が現れるため，対応関係は $\xi \leftrightarrow f$, $\eta \leftrightarrow g$, $[\xi, \eta] \leftrightarrow \{g, f\}$ となっている.)このポアソン括弧を

$$\begin{aligned}\{f, g\} &= i_\xi i_\eta \Omega = \eta^\mu \xi^\nu \Omega_{\mu\nu} \\ &= -i_\xi dg = i_\eta df \\ &= \Omega^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu g\end{aligned} \tag{20.10}$$

と定義しよう．$\Omega_{\mu\nu}$ の反対称性から，

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{20.11}$$

が得られる．局所座標をもちいると，ポアソン括弧の定義から次のように書ける．

$$\begin{aligned}2\,\partial_\alpha\{f,g\} &= \partial_\alpha(\eta\cdot\partial f-\xi\cdot\partial g)\\ &= \partial_\alpha\eta^\mu\partial_\mu f+\eta^\mu(\partial_\mu\partial_\alpha f)-\partial_\alpha\xi^\mu\partial_\mu g-\xi^\mu(\partial_\mu\partial_\alpha g)\\ &= \partial_\alpha\eta^\mu\partial_\mu f-\partial_\alpha\xi^\mu\partial_\mu g+\eta\cdot\partial(\xi^\mu\Omega_{\alpha\mu})-\xi\cdot\partial(\eta^\mu\Omega_{\alpha\mu})\\ &= \partial_\alpha\eta^\mu\partial_\mu f-\partial_\alpha\xi^\mu\partial_\mu g+(\xi\cdot\partial\eta-\eta\cdot\partial\xi)^\mu\Omega_{\mu\alpha}\\ &\qquad +\eta^\mu\xi^\nu(\partial_\mu\Omega_{\alpha\nu}+\partial_\nu\Omega_{\mu\alpha})\\ &= [\xi,\eta]^\mu\Omega_{\mu\alpha}+\partial_\alpha(\eta^\mu\xi^\nu\Omega_{\mu\nu})+\eta^\mu\xi^\nu(\partial_\mu\Omega_{\alpha\nu}+\partial_\nu\Omega_{\mu\alpha}+\partial_\alpha\Omega_{\nu\mu})\\ &= [\xi,\eta]^\mu\Omega_{\mu\alpha}+\partial_\alpha\{f,g\}+\eta^\mu\xi^\nu(\partial_\mu\Omega_{\alpha\nu}+\partial_\nu\Omega_{\mu\alpha}+\partial_\alpha\Omega_{\nu\mu}).\end{aligned} \tag{20.12}$$

Ω が閉形式であることを局所座標をもちいて表すと，$\partial_\mu\Omega_{\alpha\nu}+\partial_\nu\Omega_{\mu\alpha}+\partial_\alpha\Omega_{\nu\mu}=0$ となる．よって，

$$-d\{g,f\}=i_{[\xi,\eta]}\,\Omega \tag{20.13}$$

を得る．これは上述の対応関係を示している．

母関数 f に対応するハミルトン・ベクトル場 ξ によって生成される正準変換のもとで，関数 F がどれだけ変化するかを考えよう．これは F を ξ についてリー微分すると与えられる．よって，

$$\delta F=\xi^\mu\partial_\mu F=\{F,f\} \tag{20.14}$$

である．この変換は F と ξ に対応する母関数 f とのポアソン括弧によって与えられる．

ポアソン括弧の重要な性質にヤコビの恒等式がある．これは任意の 3 つの関数 f,g,h をもちいて，

$$\{f,\{g,h\}\}+\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\}=0 \tag{20.15}$$

と表される．上式はポアソン括弧の定義から直接示すことができる．実際，ξ,η,ρ を関数 f,g,h に対応するハミルトン・ベクトル場とすると，

$$\{f,\{g,h\}\}+\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\}=-i_\xi i_\eta i_\rho d\Omega \tag{20.16}$$

となる．よって，ヤコビの恒等式は Ω が閉形式であることから導かれる．この結果は (20.13), (20.14) とも一致する．また，関数 F への $L_\xi L_\eta - L_\eta L_\xi$

の作用は

$$
\begin{aligned}
(L_\xi L_\eta - L_\eta L_\xi)F &= \{\{F,g\},f\} - \{\{F,f\},g\} \\
&= -\{\{g,f\},F\} \\
&= L_{[\xi,\eta]}\,F
\end{aligned}
\tag{20.17}
$$

と計算できる．ただし，2 行目でヤコビの恒等式をもちいた．

無限小の正準変換のもとで，シンプレクティック・ポテンシャルの変化は次のように計算できる．

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{A} &= L_\xi\mathcal{A} \\
&= d(i_\xi\mathcal{A} - f).
\end{aligned}
\tag{20.18}
$$

ここで，定義式 $L_\xi = (d\,i_\xi + i_\xi\,d)$ と関係式 (20.7) をもちいた．これより，正準変換のもとで $\mathcal{A} \to \mathcal{A} + d\Lambda$, $\Lambda = i_\xi\mathcal{A} - f$ となることがわかる．明らかに，$d\mathcal{A} = \Omega$ はそのような変換のもとで不変である．これは，$\mathcal{A}$ を $U(1)$ ゲージポテンシャル，Ω を対応する場の強さとみなせることを示唆している．このとき，変換 $\mathcal{A} \to \mathcal{A} + d\Lambda$ はゲージ変換である．

シンプレクティック 2-形式によって相空間 $\mathcal{M}$ 上の体積形式が

$$
\begin{aligned}
d\sigma(M) &= c\frac{\Omega\wedge\Omega\wedge\cdots\wedge\Omega}{(2\pi)^n} \\
&= c\sqrt{\det\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)}\,d^{2n}q
\end{aligned}
\tag{20.19}
$$

と定義されることに注意しよう．ここでは，$2n$ 次元の相空間を Ω の n 重積で表した．(c はこの段階では決められない定数である．）相空間の次元が無限に大きい場合は，$\Omega_{\mu\nu}$ の行列式に適切な正則化を施さなければならない．式 (20.19) で定義される体積形式はリューヴィル測度と呼ばれる．

最後に，式 (20.10) の最後の行から，相空間の座標をもちいて $\{q^\mu, q^\nu\} = \Omega^{\mu\nu}$ と書けることに注意しよう．これより，基本的なポアソン括弧はシンプレクティック構造の逆元を与えると解釈されることが多い．

2．ダルブーの定理

シンプレクティック形式にはダルブー (Darboux) の定理と呼ばれる重要な

結果がある．この定理によると，相空間上の点の近傍で，シンプレクティック 2-形式が

$$\Omega = dp_i \wedge dx_i \tag{20.20}$$

となるような座標 p_i, x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を選ぶことができる．(これらは相空間の局所座標 q^μ の関数で与えられる.) 上式から明らかなように，これらの座標がみたすポアソン括弧は

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\} &= 0, \\ \{x_i, p_j\} &= \delta_{ij}, \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \end{aligned} \tag{20.21}$$

となる．これは相空間の座標を運動量と配位空間座標に分解する標準的な表記法である．よって，ダルブーの定理は明らかに重要な結果である．この定理は通常，帰納法をもちいて証明される．以下ではその概要を述べるにとどめる．(この定理のエレガントな証明はアーノルドの教科書で与えられている[2].)

B を相空間上の点として，その近傍で Ω をダルブー形式で書くことを考えよう．1 番目の座標 p_1 として，その微分 dp_1 が B でゼロでないような座標 q の（定数でない）任意の関数を選ぶことができる．点 B で $p_1 = 0$ と仮定しても一般性は失われない．$p_1(q)$ に関連して，ハミルトン・ベクトル場

$$P_1^\mu = \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial p_1}{\partial q^\nu} \tag{20.22}$$

が存在する．つぎに，ベクトル P_1 と点 B で横断する $(2n-1)$ 次元曲面 Σ を選ぼう．このとき，方程式

$$\frac{dq^\mu}{d\tau} = -\Omega^{\mu\nu} \frac{\partial p_1}{\partial q^\nu} \tag{20.23}$$

はベクトル場 P_1 による流れを定義する．(これらの流線は曲面 Σ を横断する.) Σ 上にあるとは限らない Σ 付近の点 q を考えよう．q を始点として，(20.23) を解き，運動方向を曲面 Σ に向かうように選ぶことができる．始点 q によって決まるある値 τ で，この運動が曲面 Σ に達するとしよう．この特定の値 τ

---

[2] ［訳註］章末の参考文献 2 を参照されたい．

は始点 q の関数とみなせる．これを x_1 で表そう．式 (20.23) から，この関数 $x_1(q)$ に対して，

$$\{x_1, p_1\} = 1 \tag{20.24}$$

が成り立つことがわかる．（ここでは，τ を q の初期値の関数とみなしているので，微分にはマイナス符号が追加される．(20.23) の左辺の q^μ は運動する点であり，ポアソン括弧を得るには微分 $\partial\tau/\partial q^\mu_{初期}$ が必要となる．よって，(20.23) のマイナス符号は消去される.）p_1, x_1 は互いに正準な座標の組み合わせを与える．Σ 上の点で $x_1 = 0$ となることに注意しよう．

つぎに，$p_1 = 0$, $x_1 = 0$ で定義される曲面 Σ^* を考えよう．微分 dp_1, dx_1 は線形独立である．というのも，これらのポアソン括弧がゼロでないからである．実際，X_1 を x_1 に対応するベクトル場とすると，$i_{P_1} i_{X_1} \Omega = -1$ となる．Σ^* に沿った（接線方向の）流れを含む任意のベクトル場を ξ とする．このようなベクトルは p_1, x_1 の値を変えないので，$i_\xi dp_1 = 0$, $i_\xi dx_1 = 0$ となる．式 (20.24) とこの結果から，

$$\Omega = \Omega^* + dp_1 \wedge dx_1 \tag{20.25}$$

と書けることがわかる．Ω^* は微分 dp_1 あるいは dx_1 を含まない．これより，明らかに $d\Omega^* = 0$ である．さらに，Σ^* に沿ったベクトルの Ω^* との縮約は Ω との縮約と等しい．よって，Ω^* は Σ^* に沿ったベクトルに対して可逆でなければならない．したがって，Ω^* は $(2n-2)$ 次元である Σ^* 上のシンプレクティック 2-形式を定義する．つまり，問題は低次元空間のダルブー座標を選ぶことに帰着される．つぎに，Σ^* と Ω^* から出発して同様の手法をもちいると，新しい正準な組み合わせ p_2, x_2 を構成でき，$(2n-4)$ 次元の部分空間が得られる．よって，この手法を繰り返すと，帰納的にダルブーの定理を証明できる．

20.2　古典力学

物理量の時間発展は，ハミルトニアンと呼ばれる関数 H で生成される特別な正準変換によって与えられる．これが，力学におけるハミルトニアン形式

の本質である．$\mathcal{M}$ 上の任意の関数を F とすると，

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} \tag{20.26}$$

となる．具体的に $\mathcal{M}$ 上の局所座標をもちいると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial q^\mu}{\partial t} &= \{q^\mu, H\} \\ &= \Omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial q^\nu}\end{aligned} \tag{20.27}$$

と書ける．Ω は可逆なので，上式は

$$\Omega_{\mu\nu}\frac{\partial q^\nu}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q^\mu} \tag{20.28}$$

とも書ける．ここで，上式を作用および変分原理と関係づけることができる．作用を

$$\mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} dt\,\left(\mathcal{A}_\mu \frac{dq^\mu}{dt} - H\right) \tag{20.29}$$

と定義しよう．ただし，$q^\mu(t)$ は $\mathcal{M}$ 上の経路を与える．経路の一般的な変分 $q^\mu(t) \to q^\mu(t) + \xi^\mu(t)$ のもとで，作用は

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \int dt\,\left(\frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial q^\mu}\frac{dq^\nu}{dt}\xi^\mu + \mathcal{A}_\mu\frac{d\xi^\mu}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q^\mu}\xi^\mu\right) \\ &= \mathcal{A}_\mu\xi^\mu\Big]_{t_i}^{t_f} + \int dt\,\left(\Omega_{\mu\nu}\frac{dq^\nu}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q^\mu}\right)\xi^\mu\end{aligned} \tag{20.30}$$

だけ変化する．変分原理によると，運動方程式は，変数の境界値（始点と終点での値）が固定されているという拘束条件のもとで，作用の極小化つまり $\delta\mathcal{S} = 0$ をとることによって与えられる．上式より，この変分はハミルトン運動方程式 (20.28) を与えることがわかる．ただし，この議論には 1 つ注意点がある．というのも，q^μ は相空間の座標であり，1 次のオーダーの運動方程式をみたすからである．このため，q^μ の初期値を特定するだけでよいと思われる．しかし，ダルブーの定理によると，$\mathcal{M}$ のそれぞれの近傍で正準 1-形式 $\mathcal{A}$ が $p_i dx^i$ の形となるような座標を選ぶことができる．したがって，始点におけるすべての q^μ のデータを特定する代わりに，始点と終点における x^i のデータを特定することもできる．よって，境界項の ξ^μ は単に δx^i である．

変分原理 $\delta\mathcal{S}=0$ において，境界値は固定されるので始点・終点で $\delta x^i=0$ とおける．よって，運動方程式は確かに (20.28) となる．

Ω が与えられたとき，どのように作用を定義するかを上で示した．しかし，一般的な変分に戻って考えると，上の境界値は正準 1-形式と ξ^μ の縮約にすぎないことに注意しよう．よって，作用が与えられたとして出発すると，その作用の一般的な変分に現れる境界項から正準 1-形式，すなわち Ω を定義することができる．実際，

$$\delta\mathcal{S}=i_\xi\mathcal{A}(t_f)-i_\xi\mathcal{A}(t_i)+\int dt\left(\Omega_{\mu\nu}\frac{dq^\nu}{dt}-\frac{\partial H}{\partial q^\mu}\right)\xi^\mu \tag{20.31}$$

となる．これは，3 章で正準 1-形式を定義し，正準量子化を行ったときにもちいた式と同じである．

20.3　幾何学的量子化

量子論において，観測量の代数は演算子の代数であり，この代数の既約ユニタリー表現を与えるヒルベルト空間をもつ．したがって，許される変数変換はユニタリー変換で表され，量子化に際して次の 2 点が本質的になる．すなわち，(1) 正準変換とユニタリー変換に対応関係があること，および，(2) ヒルベルト空間上のユニタリー変換の表現が既約であること，である．相空間の関数が正準変換を生成し，エルミート演算子がユニタリー変換を生成するので，相空間上の関数とヒルベルト空間上の演算子の間には対応関係がある．よって，ポアソン括弧の代数は交換関係の代数で置き換えられるはずである．また，表現の既約性は波動関数の「偏極」を指定することに対応する[3]．

演算子をもちいたアプローチのさまざまな側面について議論する前に，まず波動関数の概念から考えよう．幾何学的なアプローチにおいて，波動関数構成の第 1 段階となるのは前量子化束 (prequantum line bundle) と呼ばれるものである．これは曲率 Ω をもつ相空間の複素直線束である．この直線束の切断は前量子化ヒルベルト空間 (prequantum Hilbert space) を成す．よ

[3] ［訳註］ここで使われている「偏極」とは，波動関数を決める上での「ゲージ」の取り方を意味している．相空間上の波動関数はこの「偏極」を決めることによって，既約な形で表すことができる．

り実用的な言葉をもちいると，これは，$\mathcal{M}$ の開近傍で共変微分が適切に定義された複素関数 $\Psi(q)$ があり，その共変微分の交換子が Ω を与えることを意味する．Ω は閉形式なので，少なくとも局所的には $\Omega = d\mathcal{A}$ と表せる．ただし，$\mathcal{A}$ はシンプレクティック・ポテンシャルである．(20.18) でみたように，正準変換のもとで Ω は不変であるが，シンプレクティック・ポテンシャルは $\mathcal{A} \to \mathcal{A}' = \mathcal{A} + d\Lambda$ と変換する．言い換えると，$\mathcal{A}$ は $U(1)$ ゲージ変換を受ける．Ψ が直線束の切断であるとは，局所的には Ψ が

$$\Psi \to \Psi' = \exp(i\Lambda)\,\Psi \tag{20.32}$$

と変換する複素関数であることを意味している．前述のとおり，$\mathcal{A}$ は $U(1)$ ゲージポテンシャルとみなせる．よって，Ψ は物質場のようなものである．上式は，正準変換がユニタリー変換として実行されなければならないという条件式と同じである．同様に，Ψ が $\mathcal{M}$ の 1 つのパッチから別のパッチへ移るときの変換則は $\mathcal{A}$ の推移関数のベキ指数をとったものによって与えられる[4]．このように定義された Ψ は，2 乗可積分 (square-integrable) であり，前量子化ヒルベルト空間を成す．その内積は

$$(1|2) = \int d\sigma(\mathcal{M})\ \Psi_1^*\ \Psi_2 \tag{20.33}$$

で与えられる．ここで，$d\sigma(\mathcal{M})$ は相空間のリューヴィル測度であり，Ω で定義される．

前量子化の段階では，相空間上のさまざまな関数に対応する演算子を導入できる．相空間上の関数 $f(q)$ は正準変換を生成し，そのためシンプレクティック・ポテンシャルは $\Lambda = i_\xi \mathcal{A} - f$ だけ変化する．したがって，これに対応する Ψ の変化は

$$\begin{aligned}
\delta\Psi &= \xi^\mu \partial_\mu \Psi - i\,(\,i_\xi \mathcal{A} - f\,)\,\Psi \\
&= \xi^\mu\,(\partial_\mu - i\mathcal{A}_\mu)\,\Psi + i f\,\Psi \\
&= (\xi^\mu \mathcal{D}_\mu + i f)\,\Psi
\end{aligned} \tag{20.34}$$

となる．1 行目の第 1 項は Ψ を関数とみなしたときの変化分であり，第 2 項

---

4 ［訳註］この意味は式 (20.32) から明らかであろう．

は $\mathcal{A}$ の変化分を埋め合わせる項である．最後の行の $\mathcal{D}_\mu$ は共変微分 $\partial_\mu - i\mathcal{A}_\mu$ である．波動関数の $U(1)$ ゲージ対称性の観点から，この共変微分が適切な微分であることがわかる．使われるべきゲージポテンシャルは確かに $\mathcal{A}$ であり，よって，曲率は Ω で与えられる．(20.34) に基づくと，$f(q)$ に対応する前量子化演算子 (prequantum operator) を

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(f) &= -i\bigl(\xi \cdot \mathcal{D} + if\bigr)\\ &= -i\xi \cdot \mathcal{D} + f \end{aligned} \tag{20.35}$$

と定義できる．

関数 f, g に対するハミルトン・ベクトル場をそれぞれ ξ, η とすると，すでに見たように，ポアソン括弧 $\{f, g\}$ に対応するベクトル場は $-[\xi, \eta]$ で与えられる．このとき，上の前量子化演算子の定義に従うと，

$$\begin{aligned}[\mathcal{P}(f), \mathcal{P}(g)] &= [-i\xi \cdot \mathcal{D} + f, -i\eta \cdot \mathcal{D} + g]\\ &= -[\xi^\mu \mathcal{D}_\mu, \eta^\nu \mathcal{D}_\nu] - i\xi^\mu [\mathcal{D}_\mu, g] + i\eta^\mu [\mathcal{D}_\mu, f]\\ &= i\xi^\mu \eta^\nu \Omega_{\mu\nu} - (\xi^\mu \partial_\mu \eta^\nu)\mathcal{D}_\nu + (\eta^\mu \partial_\mu \xi^\nu)\mathcal{D}_\nu - i\xi^\mu \partial_\mu g + i\eta^\mu \partial_\mu f\\ &= i\left(-\xi^\mu \eta^\nu \Omega_{\mu\nu} + i[\xi, \eta] \cdot \mathcal{D}\right)\\ &= i\bigl(-i\left(i_{[\eta,\xi]}\mathcal{D}\right) + \{f, g\}\bigr)\\ &= i\mathcal{P}(\{f, g\}) \end{aligned} \tag{20.36}$$

が得られる．すなわち，前量子化演算子は相空間上の関数がみたすポアソン括弧代数の 1 つの表現を与える．

前量子化波動関数 Ψ は相空間のすべての変数に依存する．そのような波動関数のポアソン括弧代数の表現（これは前量子化演算子で与えられる）は可約である．このことは，次のように簡単に例証できる．シンプレクティック 2-形式が $\Omega = dp \wedge dx$ となる 1 次元の点粒子を考えよう．このとき $\mathcal{A} = pdx$ と選べる．x と p に対応するベクトル場は $\xi_x = -\partial/\partial p$, $\xi_p = \partial/\partial x$ である．これらに対応する前量子化演算子は

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x) &= \quad i\frac{\partial}{\partial p} + x,\\ \mathcal{P}(p) &= -i\frac{\partial}{\partial x}\end{aligned} \tag{20.37}$$

であり，交換関係

$$[\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(p)] = i \tag{20.38}$$

をみたす．よって，明らかに，前量子化関数 $\Psi(x,p)$ をもちいて $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{P}(p)$ の代数表現が得られる．しかし，これは可約である．なぜなら，関数の部分集合として p に依存しない相空間上の関数，すなわち条件式

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p} = 0 \tag{20.39}$$

をみたす関数を考えると，前量子化演算子は

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) &= x, \\ \mathcal{P}(p) &= -i\frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \tag{20.40}$$

となり，これも同じ代数 (20.38) に従うからである．したがって，Ψ が (20.39) をみたすような部分空間上でも観測量の代数表現を求めることができるので，最初の表現 (20.37) は可約であることがわかる．

既約表現を求めるには，前量子化波動関数が相空間変数の半分だけに依存するような補助的な拘束条件を課す必要がある．これは偏極の選択に相当し，一般にポアソン代数の既約表現を導く．これを実行するには，

$$\Omega_{\mu\nu} P_i^\mu P_j^\nu = 0 \tag{20.41}$$

となるような n 個のベクトル場 P_i^μ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を選び，これらに条件

$$P_i^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi = 0 \tag{20.42}$$

を課す必要がある．偏極はベクトル P_i^μ によって定義される．このような制限を受けた波動関数が真の波動関数となる．

つぎに，これらの波動関数からヒルベルト空間を形成するには，関数の内積を定義し，さらに関数を 2 乗可積分関数に制限しなければならない．相空間上では，Ω をもちいて体積要素と内積の概念を定義できるが，一般に，偏極の条件を課すと内積を自然に選ぶことはできない．しかし，ヒルベルト空間上で自然な内積をとれる場合がある．これは，相空間がケーラー多様体でもある場合に起きる．このとき，Ω はケーラー形式あるいはその倍数で表せ

る．この場合，局所複素座標を導入することができ，

$$\Omega = \Omega_{a\bar{a}} dx^a \wedge dx^{\bar{a}} \tag{20.43}$$

$(a, \bar{a} = 1, 2, \ldots, n)$ と書ける．共変微分は次の形で与えられる．

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a &= \partial_a - i\mathcal{A}_a, \\ \mathcal{D}_{\bar{a}} &= \partial_{\bar{a}} - i\mathcal{A}_{\bar{a}}. \end{aligned} \tag{20.44}$$

ケーラー多様体には，次のように定義されるケーラー・ポテンシャル K が存在する．

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a &= -\frac{i}{2}\partial_a K, \\ \mathcal{A}_{\bar{a}} &= \quad \frac{i}{2}\partial_{\bar{a}} K. \end{aligned} \tag{20.45}$$

この場合，正則偏極 (holomorphic polarization)

$$\mathcal{D}_{\bar{a}} \Psi = \left(\partial_{\bar{a}} + \frac{1}{2}\partial_{\bar{a}} K\right) \Psi = 0 \tag{20.46}$$

を選ぶことができる．これより，波動関数は

$$\Psi = \exp\left(-\frac{1}{2}K\right) F \tag{20.47}$$

と表せる．ただし，F は $\mathcal{M}$ 上の正則関数である．したがって，波動関数はケーラー・ポテンシャルの因子を除いて正則となる．この場合，前量子ヒルベルト空間の内積は定数倍を除いてヒルベルト空間の内積と同じになる．具体的には，

$$\langle 1|2 \rangle = \int d\sigma(\mathcal{M})\ e^{-K} F_1^* F_2 \tag{20.48}$$

となる．本章で興味のあるほとんどすべての場合は，このタイプのものである．

偏極を決めた波動関数が定義できたので，観測量をこの波動関数に作用する線形演算子として表すことを考えよう．これは，前量子化微分演算子の場合と同じアイデアである．関数 $f(q)$ に対応するハミルトン・ベクトル場を ξ とする．ξ と偏極ベクトル場 P_i の交換子が P_i それ自体に比例するとき（つまり，ある関数 C_i^j をもちいて $[\xi, P_i] = C_i^j P_j$ と書けるとき），明らかに，ξ によって偏極は変化しない．よって，$\xi\Psi$ は Ψ と同じ偏極条件をみたす．こ

の場合，$f(q)$ に対応する演算子は $\mathcal{P}(f)$ で与えられる．偏極を保存しない演算子の場合は，より複雑になる．観測量に対応する演算子はユニタリー変換の生成子なので，古典極限が求めるべき正準変換となるような無限小ユニタリー変換を直接構成し，その結果から量子演算子を定義しなければならない．これを行うには，一般に，異なる偏極条件に従う波動関数を組み合わせる必要がある．

20.4　量子化における位相幾何学的な特徴

つぎに，相空間の位相幾何学的（トポロジカル）な特徴とその量子化への効果を考えよう．すでに述べたように，トポロジカルな問題として重要なものは 2 つあり，それらは相空間についての 1 次と 2 次のコホモロジーに関係している．

1. 非自明な $\mathcal{H}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ をもつ場合.

まず，$\mathcal{H}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R}) \neq 0$ の場合を考えよう．この場合，あるシンプレクティック 2-形式 Ω に対して，異なるシンプレクティック・ポテンシャルが存在する．つまり，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{A} + A$ は A が閉形式 $(dA = 0)$ であれば，同じ Ω を導く．もし A が完全形式であって，$\mathcal{M}$ 上で大域的に定義された関数 h をもちいて $A = dh$ となるならば，関数 h は正準変換を与え，物理的な結果は不変である．よって，これは正準変換を行えば $A = 0$ と同じである．A が閉形式であるが完全形式ではない場合，すなわちコホモロジー $\mathcal{H}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ が非自明な要素をもつ場合，これは正準変換で除去できない．局所的には，ある関数 f をもちいて $A = df$ と書けるが，f は $\mathcal{M}$ 上で大域的に定義されない．このようにシンプレクティック・ポテンシャルを一意に選べないことは，運動方程式 (20.27) にあるように，Ω で定義される古典力学には影響を与えない．しかし量子論の場合は，そのような A によって違いが生じる．これは作用をもちいて簡単にみることができる．点 a から点 b への経路 C を $q^\mu(t)$ とパラメータ表示すると，作用は

$$\mathcal{S} = \int dt \left(\mathcal{A}_\mu \frac{dq^\mu}{dt} - H \right) + \int_a^b A_\mu dq^\mu \qquad (20.49)$$

となる．作用は経路に依存するが，A の寄与はトポロジカルである．経路を C から C' へ端点を固定しながら少し変位させると，ストークスの定理から，

$$\begin{aligned}\int_C A - \int_{C'} A &= \oint_{C-C'} A \\ &= \int_\Sigma dA \\ &= 0\end{aligned} \tag{20.50}$$

となることがわかる．ここで，$C - C'$ は C に沿って a から b に行き，C' に沿って b から a に戻ってくる経路である．(戻ってくるときは向きが逆になるので，マイナス符号がつく.）Σ は $C - C'$ を境界にもつ $\mathcal{M}$ 上の曲面である．上の結果は，A の寄与が経路の微小変位のもとで不変であることを示している．(これは作用の他の項には当てはまらない.）特に，閉経路が可縮である限り，この積分値は常にゼロである．というのも，このとき（積分値を変えない）経路の微小変位を繰り返すと最終的に経路をゼロに縮約できるからである．可縮でないループがあるとき，非自明な寄与が現れる．$\mathcal{H}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R}) \neq 0$ であれば，非可縮なループが存在する．量子論では，$e^{i\mathcal{S}}$ が重要であるので，$e^{i\int A}$ が必要になる．簡単のため，$\mathcal{H}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R}) = \mathbf{Z}$ と仮定すると，トポロジカルに区別できる非可縮なループは，同じループを何回もまわる自由度を除いて，1 つに決まる．定数 θ をもちいて，$A = \theta\alpha$ とする．ただし，α は非可縮なループに沿って 1 周して積分したときに 1 を与えるように規格化されている．ループを n 周まわるすべての経路に対して，

$$\exp\left(i\oint A\right) = \exp\left(i\theta\oint\alpha\right) = \exp\left(i\theta n\right) \tag{20.51}$$

となることがわかる．$\theta \to \theta + 2\pi$ と変位してもこの値は変わらないので，θ をゼロから 2π の間に制限できることに注意しよう．上式を作用 (20.49) に代入し，作用をすべての経路についての関数とみなすと，この作用は余分なパラメータ θ をもつことがわかる．したがって，$\mathcal{H}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R}) \neq 0$ によりシンプレクティック・ポテンシャルが一意に選べないため，量子論を完全に特徴づけるのに必要な余分なパラメータ θ が導かれる．$\mathcal{H}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ が $\mathbf{Z}$ でない場合は，区別できる経路の数が増えるので，このようなパラメータの数も増える．

波動関数をもちいて，これらの結果を理解することも簡単にできる．関連

する共変微分は $\mathcal{D}_\mu \Psi = (\partial_\mu - i\mathcal{A}_\mu - iA_\mu)\Psi$ の形で書ける．波動関数は

$$\Psi(q) = \exp\left(i\int_a^q A\right)\Phi(q) \tag{20.52}$$

と書ける．ただし，積分範囲の始点は固定点 a で与えられる．上式を共変微分の式にもちいると，Φ への作用に対して，A を $\mathcal{D}_\mu$ から除くことができる．これは，変換 $\exp\left(i\int_a^q A\right)$ が一価関数でないことを除けば，正準変換と同様である．非可縮な閉経路を 1 周すると，この因子は $e^{i\theta}$ の位相を与える．Ψ は一価関数なので，これは Φ が補完的な位相因子をもたなければならないことを意味する．つまり，Φ は一価関数ではないが，θ でラベルされる特定の位相をもたなければならない．したがって，共変微分さらにはさまざまな演算子公式から A を排除することができるが，このような Φ に作用するハミルトニアンを対角化すると，角度 θ に依存する結果が得られる．

この種のトポロジカルな特徴の一例として，非アーベル型ゲージ理論の θ パラメータがある．また，エニオン（つまり 2 次元空間上の粒子で分数統計をもつ粒子）の記述もこの例である．

2. 非自明な $\mathcal{H}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ をもつ場合.

つぎに，もう 1 つのトポロジカルな特徴つまり $\mathcal{H}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R}) \neq 0$ の場合について考えよう．この場合，$\mathcal{M}$ 上に完全ではないが閉じた 2-形式が存在する．そのため，3 次元領域の境界として表されない 2 次元閉曲面，すなわち可縮でない 2 次元閉曲面が存在する．一般に，$\mathcal{H}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ の要素をこのような可縮でない 2 次元閉曲面で積分するとゼロにならない．Ω を $\mathcal{H}^2(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ の非自明な要素とすると，シンプレクティック・ポテンシャルは大域的に定義できない．これは次のように簡単にわかる．可縮でない 2 次元閉曲面 Σ での Ω の積分

$$I(\Sigma) = \int_\Sigma \Omega \tag{20.53}$$

を考えよう．Σ' を Σ の微小変形とすると，

$$I(\Sigma) - I(\Sigma') = \int_{\Sigma - \Sigma'} \Omega = \int_V d\Omega = 0 \tag{20.54}$$

となる．ここで，V は曲面 Σ と Σ' を境界にもつ 3 次元体積である．よって，Ω の積分はトポロジカル不変量，つまり積分が行われる曲面の微小変形によっ

て変化しない量である．Ω が Σ 上で大域的に定義されるある $\mathcal{A}$ で $d\mathcal{A}$ と書けるとすると，ストークスの定理から明らかに $I(\Sigma)$ はゼロとなる．したがって，$I(\Sigma)$ がゼロでないとすると，Σ 上で大域的に $\mathcal{A}$ を定義することはできない．$\mathcal{A}$ を表すには，異なる座標パッチで異なる関数を使い，重複領域でこれらを関係づける推移関数をもちいなければならない．重複領域では，重複しているパッチの対応する $\mathcal{A}$ の定義がそれぞれ異なるかもしれないが，Ω 自体は同じである．よって，推移関数は正準変換を与えなければならない．例として，$\mathcal{M}$ の部分空間となる非可縮で閉じた 2 次元球面，あるいはそのなめらかな変形を考えよう．これは 2 つの座標パッチで覆うことができる．これらは通常 N と S で表され，2 つの半球面に対応している．シンプレクティック・ポテンシャルはそれぞれ $\mathcal{A}_N$, $\mathcal{A}_S$ で表される．赤道付近の重複領域で，これらは

$$\mathcal{A}_N = \mathcal{A}_S + d\Lambda \tag{20.55}$$

によって関係づけられる．ここで，Λ は重複領域で定義される関数であり，これは 2 つの $\mathcal{A}$ の間の正準変換を与える．

$\mathcal{A}$ によって量子論が構成されており，また，特に，正準変換は波動関数のユニタリー変換として表されるので，パッチ N には Ψ_N，パッチ S には Ψ_S がなければならないことがわかる．赤道上でこれらは正準変換で関係づけられる．(20.32) から，これは

$$\Psi_N = \exp(i\Lambda)\,\Psi_S \tag{20.56}$$

で与えられる．つぎに，$d\Lambda$ を赤道 E で積分することを考えよう．E は N あるいは S の境界となる閉曲線である．(20.55) から，これは次のように計算できる．

$$\begin{aligned}\Delta\Lambda = \oint_E d\Lambda &= \int_E \mathcal{A}_N - \int_E \mathcal{A}_S \\ &= \int_{\partial N} \mathcal{A}_N + \int_{\partial S} \mathcal{A}_S \\ &= \int_N \Omega + \int_S \Omega \\ &= \int_\Sigma \Omega. \end{aligned} \tag{20.57}$$

2 行目で S の項の符号を逆にした．これは，S の境界としての E は N の境界としての E と反対の向き付けをもつためである．上式は，$I(\Sigma)$ がゼロでなければ，赤道を 1 回りするときの Λ の変化，すなわち $\Delta\Lambda$ はゼロにならないことを意味する．つまり，Λ は赤道上で一価関数ではない．しかし，波動関数は一価関数でなければならない．(20.56) から，これは $\exp(i\Delta\Lambda) = 1$ すなわち $\Delta\Lambda = 2\pi n$（n は整数）の場合に成り立つ．(20.57) と合わせると，量子論における波動関数の一価性から

$$\int_{\Sigma} \Omega = 2\pi n \tag{20.58}$$

が要請される．シンプレクティック 2-形式を非可縮な 2 次元閉曲面上で積分すると，その積分値は 2π の整数倍に量子化される．以上では，2 次元球面を変形した曲面について議論したが，異なるトポロジーをもつ非可縮な 2 次元曲面についても同様な議論ができる．よって，(20.58) はきわめて一般的な結果である．

この種のトポロジカルな特徴の典型例として，磁気単極子の場における荷電粒子の運動が挙げられる．このとき，条件式 (20.58) はディラックの量子化条件である．また，場の理論に頻出するヴェス–ズミノ項もこの例の 1 つである．

20.5 幾何学的量子化のまとめ

正則偏極をもちいて系を量子化する際の要点は，次のようにまとめられる．

(1) ケーラー多様体でもある相空間が必要である．このとき，シンプレクティック 2-形式はケーラー形式の倍数で与えられる．

(2) 偏極条件は $\mathcal{D}_{\bar{a}}\,\Psi = 0$ と選ばれる．

(3) 前量子化ヒルベルト空間の内積（これは，本質的に相空間上の 2 乗可積分性を意味する）は，正則偏極を受けた真のヒルベルト空間上の内積でもある．

(4) 選択された偏極条件を保つ観測量 $f(q)$ に対応する演算子は，真の（偏極を受けた）波動関数に作用する前量子化演算子 $\mathcal{P}(f)$ で与えられる．

(5) 偏極条件を保たない観測量については，古典極限が必要な正準変換とな

るような無限小ユニタリー変換を構成しなければならない．

(6) 相空間 $\mathcal{M}$ が可縮でない 2 次元曲面をもつ場合，この曲面で Ω を積分すると，その積分値は 2π の整数倍に量子化されなければならない．

(7) $\mathcal{H}^1(\mathcal{M}, \mathbf{R})$ がゼロでないとき，同じ Ω を与える異なる $\mathcal{A}$ が存在する．このとき，量子論を完全に特定するためには，余分なパラメータが必要となる．

20.6　応用例

20.6.1　コヒーレント状態

1 次元量子系 $\Omega = dp \wedge dx = i dz \wedge d\bar{z}$ を考えよう．ただし，$(p \pm ix)/\sqrt{2} = z, \bar{z}$ である．この系において

$$\mathcal{A} = \frac{i}{2}(z\,d\bar{z} - \bar{z}\,dz) \tag{20.59}$$

と選ぶ．共変微分は $\partial_z - \frac{1}{2}\bar{z}$, $\partial_{\bar{z}} + \frac{1}{2}z$ で与えられる．正則偏極は $P = \partial/\partial\bar{z}$ に対応し，条件式

$$\left(\partial_{\bar{z}} + \frac{1}{2}z\right)\Psi = 0 \tag{20.60}$$

を導く．これは，この例における式 (20.46) に相当する．この解は次の形で与えられる．

$$\Psi = e^{-\frac{1}{2}z\bar{z}}\varphi(z). \tag{20.61}$$

ここで，$\varphi(z)$ は z について正則である．

$z, \bar{z}$ に対応するベクトル場は

$$\begin{aligned} z &\leftrightarrow -i\frac{\partial}{\partial\bar{z}}, \\ \bar{z} &\leftrightarrow \quad i\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{20.62}$$

である．これらは $P = \partial/\partial\bar{z}$ と可換であるので，偏極条件は保たれる．これらに対応する前量子化演算子は

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z) &= -i(-i)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} + \frac{1}{2}z\right) + z = -\frac{\partial}{\partial\bar{z}} + \frac{1}{2}z, \\ \mathcal{P}(\bar{z}) &= -i(\,i\,)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}\bar{z}\right) + \bar{z} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}\bar{z} \end{aligned} \tag{20.63}$$

である．偏極条件をみたす Ψ に対応する (20.61) の関数 $\varphi(z)$ への作用として，これらの前量子化演算子は

$$\mathcal{P}(z)\,\varphi(z) = z\,\varphi(z),$$
$$\mathcal{P}(\bar{z})\,\varphi(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{20.64}$$

と表される．$\varphi(z)$ についての内積は

$$\begin{aligned}\langle 1|2\rangle &= \int i\frac{dz\wedge d\bar{z}}{2\pi}\,\Psi_1^*\,\Psi_2 \\ &= \int i\frac{dz\wedge d\bar{z}}{2\pi}\,e^{-z\bar{z}}\;\varphi_1^*\,\varphi_2\end{aligned} \tag{20.65}$$

となる．ここで求めたのはハイゼンベルク代数の標準的なコヒーレント状態表示である．これは，バーグマン (Bargmann) 表示とも呼ばれる．

20.6.2　2 次元球面の量子化

相空間としてケーラー多様体とみなせる 2 次元球面 $S^2 \sim \mathbf{CP}^1$ を考えよう．複素座標 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ をもちいると，標準的なケーラー形式は

$$\omega = i\,\frac{dz\wedge d\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} \tag{20.66}$$

となる．計量は $ds^2 = e^1e^1 + e^2e^2$ で与えられる．ただし，フレーム場は

$$e^1 = \frac{dx}{1+r^2}\,, \qquad e^2 = \frac{dy}{1+r^2} \tag{20.67}$$

$(r^2 = z\bar{z})$ である．リーマン曲率は $\mathcal{R}^{12} = 4e^1\wedge e^2$ で与えられ，オイラー数は

$$\chi = \int \frac{\mathcal{R}_{12}}{2\pi} = 2 \tag{20.68}$$

となる．

相空間はゼロでない $\mathcal{H}^2(\mathcal{M})$ をもち，これはケーラー形式で与えられる．すでに議論したように，適切な量子化を得るにはシンプレクティック 2-形式は $\mathcal{M}$ の整数コホモロジー類に属さなければならない．ここでは n を整数として，

$$\Omega = n\,\omega = in\,\frac{dz\wedge d\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} \tag{20.69}$$

ととる．この場合，$\int_{\mathcal{M}} \Omega = 2\pi n$ となり量子化条件がみたされる．シンプレクティック・ポテンシャルは

$$\mathcal{A} = \frac{in}{2}\left[\frac{z\,d\bar{z} - \bar{z}\,dz}{(1+z\bar{z})}\right] \tag{20.70}$$

ととれる．共変微分は $\partial - i\mathcal{A}$ で与えられる．また，正則偏極の条件式は

$$(\partial_{\bar{z}} - i\mathcal{A}_{\bar{z}})\Psi = \left[\partial_{\bar{z}} + \frac{n}{2}\frac{z}{(1+z\bar{z})}\right]\Psi = 0 \tag{20.71}$$

となる．これは

$$\Psi = \exp\left(-\frac{n}{2}\log(1+z\bar{z})\right) f(z) \tag{20.72}$$

と解ける．$n\log(1+z\bar{z})$ は Ω のケーラー・ポテンシャルであることに注意しよう．内積は

$$\langle 1|2\rangle = i\alpha \int \frac{dz \wedge d\bar{z}}{2\pi(1+z\bar{z})^{n+2}}\, {f_1}^* f_2 \tag{20.73}$$

で与えられる．ここで，α は定数であり，波動関数の規格化因子の中に吸収できる．(20.72) の $f(z)$ は正則なので，特異点をもたない波動関数の基底は $f(z) = 1,\ z,\ z^2, \ldots,\ z^n$ で与えられることがわかる．(z の高次の項は有限なノルムをもたない.) よって，ヒルベルト空間の次元は $(n+1)$ である．この次元が有限であるのは，状態数を相空間の体積として半古典的に評価することによって理解することもできる．相空間 $\mathcal{M} = S^2$ の体積は有限なので，ヒルベルト空間の次元も有限でなければならない．

この次元は，別の手法で理解することもできる．偏極条件 (20.71) は，$U(1)$ ゲージ場 $\mathcal{A}$ と曲率 $\mathcal{R}_{12}$ をもつ Ψ が $\bar{\partial}$ について閉じていることを示す．したがって，(20.71) の規格化された解は捩(ねじ)れドルボー複体 (twisted Dolbeault complex) についての指数定理，すなわち，

$$\mathrm{index}(\bar{\partial}_V) = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{td}(\mathcal{M}) \wedge Ch(V) \tag{20.74}$$

で与えられる．ただし，ここでは 2 次元なので，トッド類 $\mathrm{td}(\mathcal{M})$ は $\mathcal{R}/4\pi$ であり，チャーン指標 $Ch(V) = \mathrm{Tr}(e^{iF/2\pi}) = \mathrm{Tr}(e^{\Omega/2\pi})$ は $\int \Omega/2\pi$ である．よって，

$$\mathrm{index}(\bar{\partial}_V) = \int_{\mathcal{M}} \frac{\Omega}{2\pi} + \int_{\mathcal{M}} \frac{\mathcal{R}}{4\pi}$$

$$= n + 1 \tag{20.75}$$

が得られる．半古典的には，状態数は $\int \Omega/2\pi = n$ と期待されることに注意しよう．この場合，余分な 1 はオイラー数から求められる．

波動関数の正規直交基底は

$$f_k(z) = \left[\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right]^{\frac{1}{2}} z^k \tag{20.76}$$

ととれる．このような 2 つの関数 f, g の内積は

$$\langle f|g\rangle = i(n+1)\int \frac{dz \wedge d\bar{z}}{2\pi(1+z\bar{z})^{n+2}}\, f^* g \tag{20.77}$$

で与えられる．これは (20.73) と同じであることに注意しよう．ただし，ここでは $\alpha = n + 1$ と特定されている．この値から，$(n+1)$ 次元のヒルベルト空間で期待されるとおり，$\mathrm{Tr}\, 1 = n + 1$ が与えられる．

古典的には，相空間上の 2 つの関数 F と G のポアソン括弧は

$$\begin{aligned}\{F, G\} &= \Omega^{\mu\nu}\partial_\mu F \partial_\nu G \\ &= \frac{i}{n}(1+z\bar{z})^2\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\frac{\partial G}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{20.78}$$

で与えられる．

つぎに，ベクトル場

$$\begin{aligned}\xi_+ &= i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \xi_- &= -i\left(\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right), \\ \xi_3 &= i\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\end{aligned} \tag{20.79}$$

を考えよう．これらが球面の標準的な $SU(2)$ 等長変換であることは簡単に示せる．ξ のリー括弧は $\pm i$ 因子を除いて標準的な $SU(2)$ 代数の形で与えられる．これは ξ の定義の仕方によるものである．（ここでは，量子的な代数が標準的な形になるように定数因子を加えた.）さらに，ξ は次の関数に対応するハミルトン・ベクトル場でもある．

$$J_+ = -n\,\frac{z}{1+z\bar{z}},$$

$$J_- = -n\,\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \qquad (20.80)$$
$$J_3 = -\frac{n}{2}\left(\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right).$$

これらの関数に関する前量子化演算子 $-i\xi\cdot\mathcal{D}+J$ は

$$\mathcal{P}(J_+) = \left(z^2\partial_z - \frac{n}{2}z\frac{2+z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right) - i\xi_+^{\bar{z}}\mathcal{D}_{\bar{z}},$$
$$\mathcal{P}(J_-) = \left(-\partial_z - \frac{n}{2}\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right) - i\xi_-^{\bar{z}}\mathcal{D}_{\bar{z}}, \qquad (20.81)$$
$$\mathcal{P}(J_3) = \left(z\partial_z - \frac{n}{2}\frac{1}{1+z\bar{z}}\right) - i\xi_3^{\bar{z}}\mathcal{D}_{\bar{z}}$$

となる．偏極を受けた波動関数に $\mathcal{D}_{\bar{z}}$ が作用するとゼロになる．Ψ を (20.72) の形で書くと，正則な波動関数 $f(z)$ に作用する演算子を計算することができ，

$$\hat{J}_+ = z^2\partial_z - n\,z,$$
$$\hat{J}_- = -\partial_z, \qquad (20.82)$$
$$\hat{J}_3 = z\partial_z - \frac{1}{2}\,n$$

を得る．$j=n/2$ と半整数を定義すると，上の演算子は $J^2=j(j+1)$ で次元が $n+1=2j+1$ となる $SU(2)$ 代数の既約ユニタリー表現に対応していることがわかる．ここで，表現は唯一に決まり，これはシンプレクティック形式 Ω を選ぶことで固定されることに注意しよう．

シンプレクティック・ポテンシャル (20.70) と作用 (20.29) から，上の結果を導く作用は

$$\mathcal{S} = i\frac{n}{2}\int dt\,\frac{z\dot{\bar{z}}-\bar{z}\dot{z}}{1+z\bar{z}} \qquad (20.83)$$

となることがわかる．ただし，ドットは時間についての微分を表す．この作用は

$$\mathcal{S} = i\frac{n}{2}\int dt\ \mathrm{Tr}(\sigma_3 g^{-1}\dot{g}) \qquad (20.84)$$

と書き換えることができる．ここで，g は (2×2) 行列で表される $SU(2)$ の要素であり，$g=\exp(i\sigma_i\theta_i)$ となる．σ_i $(i=1,2,3)$ はパウリ行列である．この作用における力学変数は $SU(2)$ の要素である．変換 $g\to g\,h$, $h=\exp(i\sigma_3\varphi)$

を施すと，

$$\mathcal{S} \to \mathcal{S} - n \int dt\ \dot{\varphi} \tag{20.85}$$

を得る．追加された項は境界項であり，運動方程式は影響を受けない．したがって，実のところ，古典的にはこの動力学は $SU(2)/U(1) = S^2$ に制限されている．実際，g を

$$g = \frac{1}{\sqrt{1+z\bar{z}}} \begin{pmatrix} 1 & z \\ -\bar{z} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} \tag{20.86}$$

とパラメータ表示すると，(20.83) の式が得られる．

古典的な動力学が $SU(2)/U(1)$ に制限されるとしても，量子論においては (20.85) の境界項の影響が現れる．例えば，$\varphi(-\infty) = 0$, $\varphi(\infty) = 2\pi$ となる $\varphi(t)$ を選ぶとしよう．このとき，$h(-\infty) = h(\infty) = 1$ なので，σ_3 方向で定義される $SU(2)$ の $U(1)$ 部分群において閉ループが与えられる．$h(t)$ をこのように選ぶと，作用は $-2\pi n$ だけ変化する．よって，$e^{i\mathcal{S}}$ は一価のままであり，量子論においても，余分な $U(1)$ の自由度が矛盾なく取り除かれる．もし係数が整数でなければ，このようなことは起きないので，量子論に矛盾が生じる．したがって，このように少し異なる視点からも，係数が整数値に量子化されることが導かれる．

これまで，球面から平面への立体射影に対応する局所的な S^2 のパラメータ表示をもちいてきたが，より大域的なアプローチとして，球面を $\mathbf{CP}^1$ とみなして，その斉次座標 (homogeneous coordinate) をもちいることもできる．ここでは，ゼロでない複素数 λ によって $u_\alpha \sim \lambda u_\alpha$ と同定できる 2 成分からなるスピノール u_α ($\alpha = 1, 2$) をもちいる．さらに，$\bar{u}_1 = u_2^*$, $\bar{u}_2 = -u_1^*$ あるいは $\bar{u}_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} u_\beta^*$ を定義する．ただし，$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}$, $\epsilon_{12} = 1$ である．シンプレクティック形式は

$$\Omega = -in \left[\frac{du \cdot d\bar{u}}{\bar{u} \cdot u} - \frac{\bar{u} \cdot du\, u \cdot d\bar{u}}{(\bar{u} \cdot u)^2} \right] \tag{20.87}$$

で与えられる．ここで，ドット記号は $u \cdot v = u_\alpha v_\beta \epsilon_{\alpha\beta}$ を意味する．これより $\Omega(\lambda u) = \Omega(u)$ となることが簡単に確認できる．つまり，これは $u \to \lambda u$ のもとで不変であるので，$\mathbf{C}^2 - \{0\}$ ではなく $\mathbf{CP}^1$ 上で正しく定義されていることがわかる．$u_2/u_1 = z$ とおくと，以前の局所パラメータ表示が得られ

る．シンプレクティック・ポテンシャルは

$$\mathcal{A} = -i\frac{n}{2}\left[\frac{u \cdot d\bar{u} - du \cdot \bar{u}}{\bar{u} \cdot u}\right] \tag{20.88}$$

となる．上式から直接，

$$\mathcal{A}(\lambda u) = \mathcal{A}(u) - d\left(i\frac{n}{2}\log(\bar{\lambda}/\lambda)\right) \tag{20.89}$$

となることがわかる．これは，$\mathcal{A}$ が $\mathbf{CP}^1$ 上で大域的に定義される 1-形式として表せないことを意味する．これは，$\int \Omega \neq 0$ から予想されることであり，したがって，$\mathbf{CP}^1$ 上でポテンシャルを大域的に定義することはできない．(20.32) から，前量子化波動関数は

$$\Psi(\lambda u, \bar{\lambda}\bar{u}) = \Psi(u, \bar{u}) \exp\left[\frac{n}{2}\log(\lambda/\bar{\lambda})\right] \tag{20.90}$$

と変換することがわかる．波動関数の偏極条件は

$$\left[\frac{\partial}{\partial \bar{u}_\alpha} - \frac{n}{2}\frac{u_\beta \epsilon_{\beta\alpha}}{\bar{u} \cdot u}\right]\Psi = 0 \tag{20.91}$$

となる．この条件式の解は

$$\Psi = \exp\left(-\frac{n}{2}\log(\bar{u} \cdot u)\right) f(u) \tag{20.92}$$

で与えられる．これと (20.90) から，正則関数 $f(u)$ は

$$f(\lambda u) = \lambda^n f(u) \tag{20.93}$$

と振る舞うことがわかる．したがって，$f(u)$ は n 個の u をもち，次の形で表される．

$$f(u) = \sum_{\alpha' s} C^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}\, u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_n}. \tag{20.94}$$

添え字の対称性のため，以前同様これらは $(n+1)$ 個の独立な関数をもつ．u, $\bar{u}$ に対して，$SU(2)$ の自然な線形作用が存在し，それらは

$$u'_\alpha = U_{\alpha\beta}\, u_\beta\,, \quad \bar{u}'_\alpha = U_{\alpha\beta}\, \bar{u}_\beta \tag{20.95}$$

で与えられる．ここで，$U_{\alpha\beta}$ は $SU(2)$ の 2×2 行列表示を成す．これらに対応する生成子は (20.81) と (20.82) で構成された J_a である．

20.6.3 G/H 型のコンパクト・ケーラー空間

2 次元球面 $S^2 = SU(2)/U(1)$ は，群のコセット空間がケーラー多様体となる場合の一例である．コンパクト・リー群 G とその部分群 H をもちいて G/H と表されるコンパクト・ケーラー多様体は数多く存在する．特に，任意のコンパクト・リー群 G に対して H が極大トーラスとなるとき，G/H はケーラー多様体となる．極大トーラスとは，互いに可換な生成子で構成される G の部分空間である．もう 1 つの例として，$\mathbf{CP}^N = SU(N+1)/U(N)$ がある．また，これら以外にも多くの例が知られている．

S^2 の場合に行ったように，シンプレクティック形式をケーラー形式に比例する 2-形式あるいは $\mathcal{H}^2(\mathcal{M})$ の生成子の組み合わせにとり，これらのケーラー空間を量子化することができる．一般に，これは群 G の既約ユニタリー表現を 1 つ導くが，その特定の表現はどのような Ω を選ぶかによって決まる．

ほとんどの場合，ケーラー形式は非常に簡単に構成できる．例として，$\mathbf{CP}^2 = SU(3)/U(2)$ を考えよう．$SU(3)$ の一般要素は (3×3) ユニタリー行列で表される．$U(1)$ 部分群を $U = \exp(iI^8\theta)$ の形の要素で定義する．ただし，

$$I^8 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{20.96}$$

である．また，これと可換な $SU(2)$ 部分群を次の形の要素で定義しよう．

$$h_{SU(2)} = \begin{pmatrix} h_{2\times 2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20.97}$$

これら 2 つの要素は $SU(3)$ の $U(2)$ 部分群を成す．つぎに，1-形式

$$\mathcal{A}(g) = iw\,\mathrm{Tr}(I^8 g^{-1} dg) \tag{20.98}$$

を考えよう．ここで，g は $SU(3)$ 群の要素であり，w は比例定数である．h を $U(2) \subset SU(3)$ の要素であるとすると，

$$\mathcal{A}(gh) = \mathcal{A}(g) - wd\theta \tag{20.99}$$

がわかる．これより，$\mathcal{A}$ は $U(2)$ 変換のもとで全微分項の分だけ変化すること

がわかる．よって，$d\mathcal{A}$ は $\mathbf{CP}^2$ 上で定義される．明らかに，これは閉形式であるが完全形式でない．というのも，対応する 1-形式が $\mathbf{CP}^2$ 上で大域的に定義されず，$G = SU(3)$ 上でのみ定義されるからである．したがって，$d\mathcal{A}$ は $\mathcal{H}^2(\mathbf{CP}^2)$ の非自明な要素である．この $d\mathcal{A}$ をシンプレクティック 2-形式としてもちいることができる．$d\mathcal{A}$ を $\mathbf{CP}^2$ 上の非自明な 2-サイクルで積分すると，その積分値は整数にならなければならない．これは，w の値が制限されることを意味する．あるいは，作用を $\mathcal{S} = \int \mathcal{A}$ とし，w について条件を課すこともできる．このとき，$e^{i\mathcal{S}}$ は $\mathbf{CP}^2$ 上で問題なく定義されている．波動関数は $SU(3)$ 上の関数であり，$SU(2)$ と $U(1)$ の作用で与えられる制限を受ける．言い換えると，ウィグナーの $\mathcal{D}$ 関数をもちいて

$$\Psi \sim \mathcal{D}^{\alpha}_{AB}(g) \tag{20.100}$$

と書ける．ここで，α は表現の添え字であり，A, B は状態の添え字である．α でラベルされる G の既約表現に属する群の要素 g の行列表現に対して，$\mathcal{D}^{\alpha}_{AB}(g)$ はその AB 行列要素を与える．

商空間を構成する群は g の右作用にとれる．このとき，$\mathcal{A}$ の変換則から Ψ は

$$\Psi(gh) = \exp(iw\theta)\ \Psi(g) \tag{20.101}$$

と変換することがわかる．これは，$SU(2)$ 部分群の g への右作用のもとで，波動関数が 1 重項状態（シングレット）であり，$U(1)$ 部分群のもとで一定の電荷 w をもつことを示している．このため，(20.100) の添え字 B の値が制限される．さらにまた，w は量子化されなければならない．これは，この添え字が (20.100) において $SU(3)$ 既約ユニタリー表現の 1 つとして許される値をとるためである．添え字 B がこのように選ばれると，添え字 A は自由に選ぶことができ，そのため量子化の結果，ヒルベルト空間は $SU(3)$ 既約ユニタリー表現の 1 つで与えられる．w はこの表現を定義する最高ウェイトに関係している.（部分群の電荷についての条件をみたす表現は数多く存在する．しかし，ここでは議論しなかった偏極条件によって，さらに制約が課せられ，許される電荷をもつさまざまな表現の中から，1 つの「ミニマル」表現が選ばれる.）これをより詳しく見るには，ハイパーチャージ Y をもちいて $I^8 = \sqrt{3/2}\,Y$ と書けることに注意しよう．したがって，$\mathcal{D}_{AB}(gU) = \mathcal{D}_{AB} \exp(i\sqrt{3/2}\,Y_B\theta)$

であり，Y_B は状態 B のハイパーチャージである．これより，w は $\sqrt{3/2}\,Y_B$ と定義される．$SU(3)$ ユニタリー表現において，ハイパーチャージの値は $\frac{1}{3}$ の単位で量子化される．($SU(2)$ 不変な状態では，ハイパーチャージは $\frac{2}{3}$ の単位で量子化される．）よって，式 (20.101) から，w は $n\sqrt{2/3}$（n は整数）と量子化されなければならないことがわかる．

具体的なパラメータ表示は次のように得られる．(20.98) のトレースを計算すると，

$$\mathcal{A} = -iw\sqrt{\frac{3}{2}}\; u_\alpha^* du_\alpha \tag{20.102}$$

となる．ただし，$g_{\alpha 3} = u_\alpha$ である．明らかに $u_\alpha^* u_\alpha = 1$ が成り立ち，これは

$$u_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\bar{z}\cdot z}}\begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{20.103}$$

とパラメータ表示できる．ポテンシャル (20.102) に対応するシンプレクティック 2-形式は

$$\begin{aligned} \Omega &= -iw\sqrt{\frac{3}{2}}\, du_\alpha^* du_\alpha \\ &= -iw\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\frac{d\bar{z}_i\, dz_i}{(1+\bar{z}\cdot z)} - \frac{d\bar{z}\cdot z\,\bar{z}\cdot dz}{(1+\bar{z}\cdot z)^2}\right] \end{aligned} \tag{20.104}$$

である．この Ω は $\mathbf{CP}^2$ 上のケーラー 2-形式に比例している．$\mathbf{CP}^2$ の非自明な 2 次元閉曲面上での Ω の積分が整数となることを要請すると，w について同じ量子化条件が得られる．これは 2 次元曲面あるいは $\mathbf{CP}^1$ の場合と同様である．偏極条件から，状態は u_α^* ではなく u_α だけの関数であることがわかる．また，$U(1)$ 電荷に関する条件から u_α の数は n に固定される．したがって，状態は次の形で表される．

$$\Psi \sim u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \cdots u_{\alpha_n}. \tag{20.105}$$

これはランク n の $SU(3)$ 対称表現に対応している．H を別の群に選ぶと，異なる表現が得られる．

より一般的に，

$$\mathcal{A}(g) = i\sum_a w_a \mathrm{Tr}(t^a g^{-1} dg) \tag{20.106}$$

ととることができる．ここで，t^a は G のリー代数の対角要素であり，w_a は定数である．H は $\sum_a w_a t^a$ と可換な部分群である．ここで，$\sum_a w_a t^a$ の対角要素がいずれも区別できるように w_a が選ばれている場合，H は G の極大トーラスとなる．$g \to gh$ $(h \in H)$ 変換のもとでの $\mathcal{A}$ の変化は完全微分項で与えられ，$d\mathcal{A}$ は G/H 上の閉じているが完全ではない微分形式を与える．もし $\sum_a w_a t^a$ の固有値に同じものがあれば，H は極大トーラスよりも大きくなる．w_a を適切に選び，量子化を行うと，G の既約ユニタリー表現が 1 つ求まる．このとき，w_a はこの表現を定義するウェイトと関係づけられる．

20.6.4　モノポール場における荷電粒子

空間 3 次元における点粒子のシンプレクティック形式は

$$\Omega = dp_i \wedge dx_i \tag{20.107}$$

で与えられる．磁場との結合を導入するには，いつもどおりの処方をもちいて p_i を $p_i + eA_i$ で置き換えればよい．ラグランジアンには $A_i \dot{x}_i$ が加わり，正準 1-形式は $m\dot{x}_i dx_i + eA_i dx_i$ となる．$p_i = m\dot{x}_i$ と書くと，シンプレクティック 2-形式は

$$\Omega = dp_i \wedge dx_i + eF \tag{20.108}$$

となることがわかる．ここで，$F = dA = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j$ は磁場の強さである．したがって，シンプレクティック 2-形式をもちいると，電磁相互作用を導入する最小結合の処方は Ω に eF を加えることに帰着される．これをもちいて，モノポール場における荷電粒子について議論しよう．モノポールは動径方向の磁場 $B_k = gx_k/r^3$ をもつとする．ただし，g はモノポールの磁荷である．また，$r^2 = x_i x_i$ である．モノポールは座標系の原点にあるとする．よって，Ω は

$$\Omega = dp_i \wedge dx_i + \frac{1}{2} eg\epsilon_{ijk} \frac{x_k}{r^3} dx_i \wedge dx_j \tag{20.109}$$

となる．これより，基本的なハミルトン・ベクトル場を定義することができる．$X_i = -\partial/\partial p_i$ と Ω の内部縮約は $-dx_i$ となるので，これは x^i に対するベクトル場を与える．$P_i' = \partial/\partial x_i$ との縮約は

$$i_{P'}\Omega = -dp_i + eg\epsilon_{ijk}\frac{x_k}{r^3}dx_j \tag{20.110}$$

となる．P' はハミルトン・ベクトル場ではない．しかし，$\partial/\partial p_i$ と Ω の縮約から dx_i が得られるので，次の組み合わせ

$$P_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - eg\epsilon_{ijk}\frac{x_k}{r^3}\frac{\partial}{\partial p_j} \tag{20.111}$$

が p_i に対応するハミルトン・ベクトル場であることがわかる．したがって，ポアソン括弧は

$$\begin{aligned}\{x_i, x_j\} &= -i_{X_i}dx_j = 0,\\ \{x_i, p_j\} &= -i_{X_i}dp_j = \delta_{ij},\\ \{p_i, p_j\} &= -i_{P_i}dp_j = eg\epsilon_{ijk}\frac{x_k}{r^3}\end{aligned} \tag{20.112}$$

となる．

これをもちいて，角運動量も計算してみよう．角度 θ_k による無限小回転のもとで，変数 x_i, p_i の変化分は

$$\begin{aligned}\delta x_i &= -\epsilon_{ijk}x_j\theta_k,\\ \delta p_i &= -\epsilon_{ijk}p_j\theta_k\end{aligned} \tag{20.113}$$

で与えられる．したがって，対応するベクトル場は

$$\xi = -\epsilon_{ijk}\theta_k\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_i} + p_j\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \tag{20.114}$$

となる．これと Ω の内部縮約をとると，

$$\begin{aligned}i_\xi\Omega &= -\epsilon_{ijk}\theta_k\left(-x_j dp_i - p_i dx_j\right) - \theta_k eg(\delta^m_j\delta^n_k - \delta^m_k\delta^n_j)\frac{x_j x_n}{r^3}dx^m\\ &= \theta_k d(-\epsilon_{ijk}x_i p_j) + \theta_k eg\left(\frac{dx_k}{r} - \frac{x_i x_k}{r^3}dx^i\right)\\ &= \theta_k d\left(-\epsilon_{ijk}x_i p_j + eg\frac{x_k}{r}\right)\end{aligned} \tag{20.115}$$

となることがわかる．したがって，回転の生成子である角運動量は

$$J_i = \epsilon_{ijk}x_j p_k - eg\frac{x_i}{r} \tag{20.116}$$

で与えられる．これは，荷電粒子の角運動量に動径方向の寄与が追加される

ことを示している．実際，$\hat{x}\cdot J=-eg$ となる．

ポアソン括弧を演算子の交換子に置き換えると，量子論を構成できる．このとき，通常とは異なる唯一の要素は，シンプレクティック 2-形式が $r=0$ で特異点をもつ点にある．したがって，非特異な記述を行うにはこの特異点を除去する必要がある．もしそうすると，空間は非可縮な 2 次元球面となり，Ω についての量子化条件が要請される．Ω を（モノポールの位置する）原点のまわりの 2 次元球面で積分すると，$4\pi eg$ を得る．よって，一般的な量子化条件 (20.58) は，

$$eg=\frac{n}{2} \tag{20.117}$$

となる．これは有名なディラックの量子化条件であり，磁荷が $1/2e$ の単位で量子化されなければならないことを示している．この値 $1/2e$ は，モノポール 1 つに対応する最小磁荷である．量子論において，角運動量の任意の成分の固有値が半整数で与えられることに注意して，磁荷の量子化について議論することもできる．すなわち，$\hat{x}\cdot J=-eg$ の結果から上と同じ量子化条件が導かれる．これは，サハ (Saha) によって最初に指摘された．

20.6.5　エニオン —— 分数スピンをもつ粒子

空間 2 次元の相対論的な粒子を考えよう．一般に，これらの粒子は，必ずしも量子化されない，任意のスピンをもつ．そのため，これらはエニオン（任意のスピンをもつ粒子）と総称される．

以下では，シンプレクティック構造から出発してこのエニオンの理論について考えてみよう．スピンのない粒子は，運動量変数 p^a と位置変数 x^a $(a=0,1,2)$ で記述される．正準構造あるいはシンプレクティック 2-形式は

$$\Omega=g_{ab}\,dx^a\wedge dp^b \tag{20.118}$$

で与えられる．ここで，$g_{ab}=diag(1,-1,-1)$ は計量テンソルである．荷電粒子の場合，前節で議論したように，最小結合の処方による電磁場 A_a との結合は $\Omega\to\Omega+eF$ で与えられる．

相対論的な荷電粒子の運動は（古典的な）ローレンツ方程式

$$\begin{aligned} \frac{p^a}{m} &= \frac{dx^a}{d\tau}, \\ \frac{dp^a}{d\tau} &= -\frac{e}{m}F^{ab}p_b \end{aligned} \tag{20.119}$$

で与えられる．ただし，τ は（質量 m の）粒子の軌道を表すパラメータである．ここでは，特定のパラメータ表示が選ばれている．すなわち，軌道のパラメータを再定義するゲージ自由性についてゲージ固定されている．よって，方程式 (20.119) はパラメータの再定義のもとで不変ではない．方程式 (20.119) から，τ の無限小変化は，相空間上で，ベクトル場

$$V = \frac{p^a}{m}\frac{\partial}{\partial x^a} - \frac{e}{m}F^{ab}p_b\frac{\partial}{\partial p^a} \tag{20.120}$$

で与えられることがわかる．τ 発展の正準生成子を例えば G とすると，これは $i_V \Omega = -dG$ で定義される．よって，$G = -p^2/(2m) + (\text{定数})$ となる．この定数の最終的な値を予期して，ここではこれを $m/2$ と選ぼう．基本的に，これは質量の**定義**を与える．したがって，

$$G = -\frac{1}{2m}(p^2 - m^2) \tag{20.121}$$

となる．

実際には，パラメータの再定義についての不変性が必要なので，この τ 発展は自明でなければならない．よって，古典的な軌道に対して G をゼロとおかなければならない．量子論においては，これは

$$G\,\Psi = 0 \tag{20.122}$$

によって実行できる．上式は量子論の基礎的な力学方程式となる．

シンプレクティック形式は

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2}\Omega_{AB}\, d\xi^A \wedge d\xi^B, \\ \Omega_{AB} &= \begin{pmatrix} 0 & -g_{ab} \\ g_{ab} & eF_{ab} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{20.123}$$

と書ける．ただし，$\xi^A = (p^a, x^a)$ は両方の相空間変数を表す．このシンプレクティック形式から，交換関係

$$[x^a,\ x^b] = 0,$$

$$[p^a,\ x^b] = ig^{ab},$$
$$[p^a,\ p^b] = ieF^{ab} \tag{20.124}$$

が導かれる．これらの関係式の解は

$$p_a = i\partial_a + eA_a \tag{20.125}$$

で与えられる．τ 発展について自明であるという条件，つまり (20.122) は

$$[(\partial_a - ieA_a)^2 + m^2]\,\Psi = 0 \tag{20.126}$$

となる．これは，粒子の量子的な運動を記述するシュレーディンガー方程式（いまの場合は，クライン–ゴルドン方程式）である．また，ローレンツ方程式 (20.119) は，量子力学的には，

$$i\frac{\partial \xi^A}{\partial t} = [\xi^A, G] \tag{20.127}$$

によって実現されることが簡単に示せる．

より一般の場合，シュレーディンガー方程式に相当する式は次のように得られる．まず，シンプレクティック 2-形式から始めよう．このとき運動方程式から，τ 発展の生成子を見出すことができる．この生成子の波動関数への作用をゼロとおくと，求める方程式が得られる．これを微分方程式として表すには，交換関係を座標とその微分（つまり正準変数）で解かなければならない．

スピンが $-s$ の自由エニオンの場合，シンプレクティック構造は

$$\Omega = dx^a \wedge dp_a + \frac{1}{2}\, s\, \epsilon_{abc} \frac{p^a dp^b \wedge dp^c}{(p^2)^{3/2}} \tag{20.128}$$

で与えられる．これより，交換関係は

$$[x^a,\ x^b] = is\,\epsilon^{abc} \frac{p_c}{(p^2)^{3/2}},$$
$$[p^a,\ x^b] = ig^{ab}, \tag{20.129}$$
$$[p^a,\ p^b] = 0$$

となる．ここで，以下で定義されるローレンツ生成子 J^a を考えよう．

$$[J^a,\ p^b] = i\epsilon^{abc}p_c,$$
$$[J^a,\ x^b] = i\epsilon^{abc}x_c. \tag{20.130}$$

J^a が

$$J^a = -\epsilon^{abc}x_b p_c - s\frac{p^a}{\sqrt{p^2}} \tag{20.131}$$

で与えられることは簡単にわかる．上式は粒子がスピン $-s$ をもつことを示している．これは $p^0 = m,\, p^1 = p^2 = 0$ の静止系で考えればすぐわかる．J^a の形は，時空間についての計量が異なる点を除けば，(20.116) と類似している．この計量の違いのため，シンプレクティック構造 (20.128) の第 2 項の係数は量子化されない．つまり，s の値は量子化されない．言い換えると，3 次元領域の境界とならないような 2 次元閉曲面は存在しない．交換関係 (20.129) は正準変数をもちいて，

$$x^a = q^a + \alpha^a(p),$$
$$\alpha^a(p) = s\epsilon^{abc}\frac{p_b\eta_c}{p^2 + \sqrt{p^2}\,p\cdot\eta} \tag{20.132}$$

と解くことができる．ただし，$\eta^a = (1,0,0)$ であり，$[q^a, q^b] = 0,\, [p^a, p^b] = 0,$ $[p^a, q^b] = ig^{ab}$, つまり $q^a = -i\frac{\partial}{\partial p_a}$ である．

(20.132) を (20.131) の x^a に代入すると，

$$J^a = -i\epsilon^{abc}p_b\frac{\partial}{\partial p^c} - s\,\frac{p^a + \sqrt{p^2}\eta^a}{\sqrt{p^2} + p\cdot\eta} \tag{20.133}$$

と表せる．これより，$p\cdot J + s\sqrt{p^2} = 0$ がわかる．$p^2 = m^2$ より，スピンが実際に $-s$ であることがわかる．よって，(20.128) のシンプレクティック構造 Ω は確かにエニオンの適切な記述を与える．

電磁場におけるエニオンのシンプレクティック構造は，$\Omega \to \Omega + eF$ とすることで得られる．よって，

$$\Omega = dx^a\wedge dp_a + \frac{1}{2}\,s\,\epsilon_{abc}\frac{p^a dp^b\wedge dp^c}{(p^2)^{3/2}} + \frac{1}{2}\,e\,F_{ab}dx^a\wedge dx^b + \mathcal{O}(\partial F) \tag{20.134}$$

となる．スピンを導入すると，Ω はさらに場の強さ F の勾配に依存する補正を受ける．上式において，これは $\mathcal{O}(\partial F)$ で示されている．ここでは，電磁場中のエニオンについてこれ以上詳しく議論しないが，実際には，上で

指摘したように波動関数を求めることができ，また，エニオンの磁気回転比 (gyromagnetic ratio) が 2 となることを示すことができる．

20.6.6 場の量子化，同時刻，光錐座標

ここでは，作用が

$$\mathcal{S} = \int d^4x \ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \frac{\partial \varphi}{\partial x^0} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right] - U(\varphi) \tag{20.135}$$

となる実スカラー場 φ を考えよう．ただし，$U(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + V(\varphi)$ である．一般的な変分を考え，始点・終点時における境界項を固定すると，(20.31) から，

$$\mathcal{A} = \int d^3x \ \dot{\varphi}\, \delta\varphi \tag{20.136}$$

となることがわかる．ただし，δ は場の空間にかかる外微分を表す．また，$\dot{\varphi} = \partial\varphi/\partial x^0$ である．$\mathcal{A}$ は固定時刻で与えられているので，φ の時間微分は独立な変数として扱われる．さらに変分をとると，シンプレクティック 2-形式

$$\Omega = \int d^3x \ \delta\dot{\varphi} \wedge \delta\varphi \tag{20.137}$$

が得られる．相空間の座標についてのポアソン括弧は，シンプレクティック 2-形式を行列とみなしたときその逆演算子で与えられることを思い出すと，

$$\begin{aligned} \{\, \varphi(\boldsymbol{x}, x^0)\,,\, \varphi(\boldsymbol{x}', x^0)\,\} &= 0, \\ \{\, \varphi(\boldsymbol{x}, x^0)\,,\, \dot{\varphi}(\boldsymbol{x}', x^0)\,\} &= \delta^{(3)}(x - x'), \\ \{\, \dot{\varphi}(\boldsymbol{x}, x^0)\,,\, \dot{\varphi}(\boldsymbol{x}', x^0)\,\} &= 0 \end{aligned} \tag{20.138}$$

となることがわかる．変数を演算子に置き換えてポアソン括弧を i 倍すると交換関係が得られるので，上式より，量子化に際して標準的な同時刻の交換関係が与えられる．

この相空間は標準的なケーラー構造も持つ．一辺が L で体積が V の立方体に閉じ込められた場を考えよう．このとき周期的境界条件を課すと，モード関数は

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}),$$
$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L} \tag{20.139}$$

と表せる．ここで，n_i は整数である．場は次のようにモード展開できる．

$$\varphi(x) = \sum_k q_k u_k(\boldsymbol{x}),$$
$$\dot{\varphi}(x) = \sum_k p_k u_k(\boldsymbol{x}). \tag{20.140}$$

場が実数で与えられることから，$q_k^* = q_{-k}$, $p_k^* = p_{-k}$ が要請される．このモード展開式を代入，変形すると，Ω は

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_k \delta p_k \wedge \delta q_{-k} \\ &= i\sum_k \delta a_k \wedge \delta a_k^* \end{aligned} \tag{20.141}$$

となる．ただし，

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_{-k} - ip_k), \quad a_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_k + ip_{-k}) \tag{20.142}$$

と定義した．これは，Ω がケーラー構造であることを示す．よって，コヒーレント状態の場合と同様に，正則量子化 (holomorphic quantization) を行うことができる．

シンプレクティック構造 $\Omega_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ を使うもう少し興味深い例として，スカラー場の光錐量子化がある．z 方向の光錐 (light-cone) に対応する光錐座標

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(z+t),$$
$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(z-t) \tag{20.143}$$

を導入しよう．場の時間 t による発展を考える代わりに，光錐座標の 1 つ，例えば u による発展を考えよう．u が一定の超曲面 (hypersurface) は，もう一方の光錐座標 v と光錐を横断する 2 つの座標 $x^T = x, y$ によってパラメータ表示される．軌道は，u が固定された場の配位 $\varphi(u,v,x,y)$，すなわち v,x,y の実関数によって特定される．理論の相空間はこの関数によって構成される．

このとき，作用は

$$\mathcal{S} = \int du\, dv\, d^2x^T \left[-\partial_u\varphi\partial_v\varphi - \frac{1}{2}(\partial_T\varphi)^2 - U(\varphi) \right] \tag{20.144}$$

と表せる．

よって，作用 $\mathcal{S}$ の変分から再度，正準 1-形式 $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A} = \int dv\, d^2x^T\, (-\partial_v\varphi\, \delta\varphi) \tag{20.145}$$

と定義できる．（これは，3 章では Θ と表された．）シンプレクティック 2-形式は

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2}\int d\mu d\mu'\, \Omega(v, x^T, v', x'^T)\ \delta\varphi(v, x^T) \wedge \delta\varphi(v', x'^T), \\ \Omega(v, x^T, v', x'^T) &= -2\,\partial_v\delta(v - v')\delta^{(2)}(x^T - x'^T), \\ d\mu &= dv\, d^2x^T \end{aligned} \tag{20.146}$$

で与えられる．これ以降の計算は，3 章で行ったものと同じである．ポアソン括弧の基本関係式は，Ω の逆元から書き下すことができる．そこで，

$$\delta(v - v')\,\delta^{(2)}(x^T - x'^T) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip_u(v-v') - ip^T\cdot(x^T - x'^T)} \tag{20.147}$$

と書くと，

$$\begin{aligned} \Omega^{-1}(v, x^T, v', x'^T) &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{ip_u}\ \exp(-ip_u(v - v') - ip^T\cdot(x^T - x'^T)) \\ &= \frac{1}{4}\epsilon(v - v')\,\delta^{(2)}(x^T - x'^T) \end{aligned} \tag{20.148}$$

となることがわかる．ここで，$\epsilon(v - v')$ は符号関数であり，$v - v' > 0$ のとき 1 に，$v - v' < 0$ のとき -1 に等しい．

したがって，相空間は次のポアソン括弧をみたす場の配位 $\varphi(v, x^T)$ で与えられる．

$$\{\varphi(u, v, x^T), \varphi(u, v', x'^T)\} = \frac{1}{4}\epsilon(v - v')\,\delta^{(2)}(x^T - x'^T). \tag{20.149}$$

u 発展に関するハミルトニアンは

$$H = \int dv\, d^2x^T \left[\frac{1}{2}(\partial_T\varphi)^2 + U(\varphi) \right] \tag{20.150}$$

で与えられる．ハミルトニアンの運動方程式は，ポアソン括弧 (20.149) をもちいて簡単に確認できる．

量子化を実行するには，φ を演算子とし，その交換関係を上のポアソン括弧の i 倍で与えてやればよい．

20.6.7 (2+1) 次元チャーン–サイモンズ理論

チャーン–サイモンズ (CS) 理論は空間 2 次元と時間 1 次元のゲージ理論である．この作用は

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= -\frac{k}{4\pi}\int_{\Sigma\times[t_i,t_f]}\mathrm{Tr}\left[AdA+\frac{2}{3}A^3\right]\\ &= -\frac{k}{4\pi}\int_{\Sigma\times[t_i,t_f]}d^3x\ \epsilon^{\mu\nu\alpha}\ \mathrm{Tr}\left[A_\mu\partial_\nu A_\alpha+\frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\alpha\right]\end{aligned} \qquad (20.151)$$

で与えられる．ここで，A_μ はリー代数の値をもつゲージポテンシャル $A_\mu = -it^aA^a_\mu$ である．t^a はエルミート行列であり，これはゲージ群の基本表現に対するリー代数の基底を成す．以下では，ゲージ群を $SU(N)$ とし，t^a を $\mathrm{Tr}(t^at^b)=\frac{1}{2}\delta^{ab}$ と規格化しよう．k は定数であり，この段階では，その正確な値を特定する必要はない．また，空間方向の多様体をあるリーマン面 Σ とし，複素座標をもちいることとする．理論の運動方程式は

$$F_{\mu\nu}=0 \qquad (20.152)$$

で与えられる．

本章の目的に沿って理論を解析するには，A_0 がゼロとなるゲージをもちいるのが最適である．このゲージを使うと，運動方程式 (20.152) から $A_z=\frac{1}{2}(A_1+iA_2)$ と $A_{\bar{z}}=\frac{1}{2}(A_1-iA_2)$ が時間によらないことがわかる．また，これらは拘束条件

$$F_{\bar{z}z}\equiv\partial_{\bar{z}}A_z-\partial_zA_{\bar{z}}+[A_{\bar{z}},A_z]=0 \qquad (20.153)$$

をみたさなければならない．この条件式は，CS ゲージ理論のガウス則にすぎない．

$A_0=0$ ゲージでは，作用は

$$\mathcal{S} = -\frac{ik}{\pi}\int dt d\mu_{\Sigma}\,\mathrm{Tr}(A_{\bar{z}}\partial_0 A_z) \tag{20.154}$$

となる．作用の変分から，境界項は

$$\delta\mathcal{S} = -\frac{ik}{\pi}\int_{\Sigma}\,\mathrm{Tr}(A_{\bar{z}}\delta A_z)\Big]_{t_i}^{t_f} \tag{20.155}$$

となる．よって，シンプレクティック・ポテンシャルは

$$\mathcal{A} = -\frac{ik}{\pi}\int_{\Sigma}\mathrm{Tr}\big(A_{\bar{z}}\delta A_z\big) + \delta\rho[A] \tag{20.156}$$

と定義できる．ただし，$\rho[A]$ は A の任意の汎関数である．$\delta\rho$ を自由に追加できるのは，正準変換の自由性による．スカラー場のときと同様に，δ は Σ 上のゲージポテンシャルの空間 $\tilde{\mathcal{A}}$ に作用する外微分であると解釈される．$\tilde{\mathcal{A}}$ はまた，ゲージ対称性によって縮小される前の理論の相空間を与える．(16 章では，ゲージポテンシャルの空間を $\mathcal{A}$ で示したが，ここでは，シンプレクティック・ポテンシャルと区別するため $\tilde{\mathcal{A}}$ とした.)

シンプレクティック 2-形式 Ω は $\delta\mathcal{A}$ で与えられる．すなわち，

$$\begin{aligned}\Omega &= -\frac{ik}{\pi}\int_{\Sigma}\mathrm{Tr}\big(\delta A_{\bar{z}}\delta A_z\big) = \frac{k}{4\pi}\int_{\Sigma}\mathrm{Tr}(\delta A\wedge\delta A)\\ &= \frac{ik}{2\pi}\int_{\Sigma}\delta A^a_{\bar{z}}\delta A^a_z\end{aligned} \tag{20.157}$$

である．(以下では，文脈から明らかなので，場の空間に作用する外積を表すウェッジ記号を省略する.)

Σ の複素構造は $\tilde{\mathcal{A}}$ に複素構造を誘導する．$A_z, A_{\bar{z}}$ は $\tilde{\mathcal{A}}$ 上の局所複素座標とみなせる．実際，$\tilde{\mathcal{A}}$ はケーラー構造をもつ．Ω は $\tilde{\mathcal{A}}$ 上のケーラー形式の k 倍で与えられ，Ω に対応するケーラー・ポテンシャル K は

$$K = \frac{k}{2\pi}\int_{\Sigma}A^a_{\bar{z}}A^a_z \tag{20.158}$$

となる．$A_{\bar{z}}$ と A_z のポアソン括弧は，Ω の成分を逆にして求めることができ，

$$\begin{aligned}&\{A^a_z(z), A^b_w(w)\} = 0,\\ &\{A^a_{\bar{z}}(z), A^b_{\bar{w}}(w)\} = 0,\\ &\{A^a_z(z), A^b_{\bar{w}}(w)\} = -\frac{2\pi i}{k}\delta^{ab}\delta^{(2)}(z-w)\end{aligned} \tag{20.159}$$

となる．量子化を行うとこれらは交換関係を与える．

ゲージ変換は

$$A^g = gAg^{-1} - dgg^{-1} \tag{20.160}$$

で与えられる．無限小ゲージ変換はベクトル場

$$\xi = -\int_\Sigma \left[(D_z\theta)^a \frac{\delta}{\delta A_z^a} + (D_{\bar{z}}\theta)^a \frac{\delta}{\delta A_{\bar{z}}^a}\right] \tag{20.161}$$

で生成される．ここで，D_z と $D_{\bar{z}}$ はそれぞれ対応するゲージ共変微分を表す．これと Ω の内部縮約をとると，

$$i_\xi \Omega = -\delta\left[\frac{ik}{2\pi}\int_\Sigma F_{z\bar{z}}^a \theta^a\right] \tag{20.162}$$

を得る．これは無限小ゲージ変換の生成子が

$$G^a = \frac{ik}{2\pi} F_{z\bar{z}}^a \tag{20.163}$$

であることを示している．したがって，相空間の縮小化は F をゼロとおくことによってなされる．これはまた，前にみたように，A_0 成分の運動方程式である．また，

$$\Omega(A^g) - \Omega(A) = \delta\left[\frac{k}{2\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g\, F)\right] \tag{20.164}$$

となることに注意しよう．(右辺の F は，2-形式 $dA + A \wedge A$ である．)

縮小化された場の配位は $\tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{G}_*$ の要素で与えられる．ただし，$\mathcal{G}_*$ はゲージ変換の群 $\mathcal{G}_* = \{g(x) : \Sigma \to G\}$ を表す．

波動汎関数の構成は次のようになる．まず，曲率 Ω の相空間上にある直線束を考える．この直線束の切断が前量子化ヒルベルト空間を与える．言い換えると，正準変換 $\mathcal{A} \to \mathcal{A} + \delta\Lambda$ のもとで $\Phi \to e^{(i\Lambda)}\Phi$ となる汎関数 $\Phi[A_z, A_{\bar{z}}]$ を考える．前量子化ヒルベルト空間上の内積は

$$\langle 1|2\rangle = \int d\mu(A_z, A_{\bar{z}})\, \Phi_1^*[A_z, A_{\bar{z}}]\, \Phi_2[A_z, A_{\bar{z}}] \tag{20.165}$$

で与えられる．ここで，$d\mu(A_z, A_{\bar{z}})$ は Ω に関連するリューヴィル測度である．ケーラー構造が与えられると，これは単に計量 $||\delta A||^2 = \int_\Sigma \delta A_{\bar{z}}\delta A_z$ に対応する体積 $[dA_z dA_{\bar{z}}]$ にすぎない．

このように構成された波動汎関数は相空間のすべての変数による．そこで，波動汎関数が相空間の半分の変数だけに依存するように，Φ に偏極条件を課さなければならない．前量子化ヒルベルト空間をこのように縮小化すると，量子論のヒルベルト空間が得られる．相空間にケーラー構造があると，偏極条件として最適なものはバーグマン偏極 (Bargmann polarization) で与えられる．この偏極を課すには次のようにすればよい．(20.156) の $\rho[A]$ を特定の形に選ぶと，シンプレクティック・ポテンシャルは

$$\mathcal{A} = -\frac{ik}{2\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}\big(A_{\bar z}\delta A_z - A_z\delta A_{\bar z}\big) = \frac{ik}{4\pi}\int_\Sigma \big(A^a_{\bar z}\delta A^a_z - A^a_z\delta A^a_{\bar z}\big) \quad (20.166)$$

ととれる．$\mathcal{A}$ をポテンシャルとした共変微分は

$$\nabla = \left(\frac{\delta}{\delta A^a_z} + \frac{k}{4\pi}A^a_{\bar z}\right), \qquad \overline{\nabla} = \left(\frac{\delta}{\delta A^a_{\bar z}} - \frac{k}{4\pi}A^a_z\right) \quad (20.167)$$

となる．このとき，バーグマンの偏極条件は

$$\nabla\,\Phi = 0 \quad (20.168)$$

すなわち，

$$\Phi = \exp\left(-\frac{k}{4\pi}\int A^a_{\bar z}A^a_z\right)\psi[A^a_{\bar z}] = e^{-\frac{1}{2}K}\psi[A^a_{\bar z}] \quad (20.169)$$

となる．ここで，K は (20.158) のケーラー・ポテンシャルである．状態は $A^a_{\bar z}$ について正則な波動汎関数 $\psi[A^a_{\bar z}]$ で表される．さらに，前量子化ヒルベルト空間の内積はそのまま量子ヒルベルト空間の内積として使うことができる．(20.169) をもちいて (20.165) を書き換えると，内積は

$$\langle 1|2\rangle = \int [dA^a_{\bar z}, A^a_z]\, e^{-K(A^a_{\bar z},A^a_z)}\,\psi_1^*\,\psi_2 \quad (20.170)$$

と表せる．また，正則な波動汎関数について

$$A^a_z\,\psi[A^a_{\bar z}] = \frac{2\pi}{k}\frac{\delta}{\delta A^a_{\bar z}}\,\psi[A^a_{\bar z}] \quad (20.171)$$

が成り立つ．

前に述べたとおり，状態にゲージ不変性を課すことにより，ヒルベルト空間を縮小する必要がある．つまり，波動汎関数に作用する生成子 $F^a_{z\bar z}$ をゼロとおかなければならない．これより，

$$\left(D_{\bar{z}}\frac{\delta}{\delta A^a_{\bar{z}}} - \frac{k}{2\pi}\partial_z A^a_{\bar{z}}\right)\psi[A^a_{\bar{z}}] = 0 \tag{20.172}$$

が得られる．

ゲージ不変性を矛盾なく実現するには，結合定数 k を量子化する必要がある．非アーベル群 G の場合，これは本質的に，e^{iS} がホモトピー的に非自明なゲージ変換を受ける際のゲージ不変性に基づく k への要請（つまり k が整数値をとること）と同じである．以下では，この拘束条件が幾何学的量子化の枠組みでどのように導かれるかを示そう．まず，$\Sigma = S^2$ 上の非アーベル型理論を考えよう．ゲージ変換の群は $\mathcal{G} = \{g(x) : S^2 \to G\}$ である．明らかに $\Pi_0(\mathcal{G}) = \Pi_2(G) = 0$, $\Pi_1(\mathcal{G}) = \Pi_3(G) = \mathbf{Z}$ である．よって，$\Pi_1(\tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{G}) = 0$, $\Pi_2(\tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{G}) = \mathbf{Z}$ となる．$\Pi_2(\tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{G})$ が非自明であることは，$\Pi_1(\mathcal{G})$ が非自明な要素をもつことからわかる．したがって，ゲージ変換についての可縮でないループ C

$$\begin{aligned} C = g(x,\lambda) \quad (0 \le \lambda \le 1), \\ g(x,0) = g(x,1) = 1 \end{aligned} \tag{20.173}$$

を考えよう．これをもちいて，ゲージ不変な空間 $\tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{G}$ における非可縮な 2 次元曲面を構成することができる．

まず，パラメータ $0 \le \lambda, \sigma \le 1$ で次のように表されるゲージポテンシャル空間上の正方形を考えよう．

$$A(x,\lambda,\sigma) = (gAg^{-1} - dgg^{-1})\,\sigma + (1-\sigma)A. \tag{20.174}$$

このポテンシャルは，$\lambda = 0$ と $\lambda = 1$ さらに $\sigma = 0$ の境界上で A となる．これはまた，$\sigma = 1$ で A のゲージ変換 A^g となる．商空間において A^g は A と同定されるので，この境界は商空間 $\tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{G}$ の 1 点に対応して 2 次元閉曲面が現れる．$g(x,\lambda)$ が $\Pi_3(G) = \mathbf{Z}$ の非自明な要素であるとき，この閉曲面は非可縮である．ここで，Ω をこの 2 次元閉曲面で積分しよう．（この計算では A をゼロとおき，$A(x,\lambda,\sigma) = -\sigma dgg^{-1}$ としてもよい.）よって，$\delta A = -\delta\sigma dgg^{-1} - \sigma d(\delta gg^{-1}) - \sigma[\delta gg^{-1}, dgg^{-1}]$ を得る．これを Ω の式に代入し，σ について積分すると

$$\int \Omega = \frac{k}{4\pi}\int \mathrm{Tr}(dgg^{-1})^2\delta gg^{-1}$$

$$= \frac{k}{12\pi}\int \mathrm{Tr}(dgg^{-1})^3$$
$$= -2\pi k Q[g] \tag{20.175}$$

を得る．ただし，2 行目で $dgg^{-1} = \partial_i gg^{-1}dx^i + \partial_\lambda gg^{-1}d\lambda$ とした．つまり，空間座標および内部座標 λ についての微分を含めた．$Q[g]$ は巻き数（整数）であり，g が属す $\Pi_1(\mathcal{G}) = \Pi_3(G)$ のホモトピー類を特徴づける．これは

$$Q[g] = -\frac{1}{24\pi^2}\int \mathrm{Tr}(dgg^{-1})^3 \tag{20.176}$$

で与えられる．幾何学的量子化の一般原理より，Ω を相空間における非可縮な 2 次元閉曲面で積分すると，(20.58) に示されているように，その値は 2π の整数倍とならなければならない．したがって，(20.175) と (20.176) から，k が整数であることが要請される．この議論は，他の Σ にも一般化される．

$U(1)$ のようなアーベル群の場合は少し異なる．$G = U(1)$ とし，Σ がトーラス $S^1 \times S^1$ の場合を考えよう．これは $z = \xi_1 + \tau\xi_2$ で記述される．ただし，ξ_1, ξ_2 は実数であり，周期性 $\xi_i \to \xi_i +$ (整数) をもつ．また，複素数 τ はトーラスのモジュラー・パラメータである．トーラスの計量は $ds^2 = |d\xi_1 + \tau d\xi_2|^2$ である．トーラスの 2 つの非可縮な基本サイクル（非可縮な閉曲線）は通常 α サイクル，β サイクルとラベルされる．さらに，トーラスは次の関係式

$$\int_\alpha \omega = 1, \qquad \int_\beta \omega = \tau \tag{20.177}$$

をみたす正則 1-形式 ω をもつ．ω は $\partial_{\bar{z}}$ のゼロモードであるので，$A_{\bar{z}}$ は

$$A_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}}\chi + i\,\frac{\pi\bar{\omega}}{\mathrm{Im}\,\tau}\,a \tag{20.178}$$

とパラメータ表示される．ここで，a は ∂_z のゼロモードに沿った $A_{\bar{z}}$ の値に対応する複素数である．これは，アーベル型の場合の式 (17.60) に相当する．

この空間において，$\Pi_0(\mathcal{G}) = \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ が成り立つ．これは，ゲージ変換 $g_{m,n}$ が 2 つのサイクルのまわりの非自明な巻き数 m, n をもつためである．$\mathcal{G}$ の連結成分の 1 つ，例えば $\mathcal{G}_{m,n}$ を考えよう．ホモトピー的に非自明な $U(1)$ 変換は $g_{m,n} = e^{i\lambda}\,e^{i\theta_{m,n}}$ と書ける．ここで，$\lambda(z,\bar{z})$ はホモトピー的に自明なゲージ変換であり，$\theta_{m,n}$ は

$$\theta_{m,n} = \frac{i\pi}{\mathrm{Im}\,\tau}\left[m\int^z(\bar{\omega}-\omega) + n\int^z(\tau\bar{\omega}-\bar{\tau}\omega)\right] \tag{20.179}$$

である．$A_{\bar{z}}$ を (20.178) とパラメータ表示すると，このゲージ変換の効果は

$$\begin{aligned} \chi &\to \chi + \lambda, \\ a &\to a + m + n\tau \end{aligned} \tag{20.180}$$

と表される．λ を適当に選ぶと，χ の実部はゼロとおける．（$F_{z\bar{z}} = 0$ の条件を課すと，この虚部もゼロとなる.）ゼロモードの物理的な部分空間は (20.180) の変換を法とした a で与えられる．すなわち，

$$\begin{aligned} (\text{ゼロモードの物理空間}) &\equiv \mathcal{C} \\ &= \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{Z} + \tau \mathbf{Z}} \end{aligned} \tag{20.181}$$

である．この空間はトーラスのヤコビ多様体 (Jacobian variety) として知られている．この空間もトーラスであるので，相空間 $\mathcal{C}$ は非自明な Π_1 と $\mathcal{H}^2$ をもつことがわかる．特に，$\Pi_1(\mathcal{C}) = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ であり，これにより，ゲージ変換 $g_{1,1}$ のもとで波動関数が獲得する位相に関係する 2 つの角度パラメータ φ_α と φ_β が現れる．ゼロモードのシンプレクティック 2-形式は

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{k\pi}{4} \frac{d\bar{a} \wedge da}{\mathrm{Im}\, \tau} \int_\Sigma \frac{\bar{\omega} \wedge \omega}{\mathrm{Im}\, \tau} \\ &= -i \frac{k\pi}{2} \frac{d\bar{a} \wedge da}{\mathrm{Im}\, \tau} \end{aligned} \tag{20.182}$$

と表せる．ゼロモードの部分をゼロモードの物理空間 $\mathcal{C}$ で積分すると

$$\int_\mathcal{C} \Omega = k\pi \tag{20.183}$$

を得る．(20.58) から，これはトーラス上の $U(1)$ 場において k が偶数に量子化されなければならないことを示している．（Ω の積分が整数で量子化されるという条件は，1 次元の波動関数つまり直線束の切断から導かれた．より一般的なベクトル束をもちいると，この量子化条件は緩められる．しかし，そのような波動関数によって確率的な解釈ができるかどうかはあまり明らかではない.）

ゼロモードのシンプレクティック・ポテンシャルは

$$\mathcal{A} = -\frac{\pi k}{4} \frac{(\bar{a} - a)(\tau d\bar{a} - \bar{\tau} da)}{(\mathrm{Im}\, \tau)^2} \tag{20.184}$$

と表される．よって，偏極条件は

$$\left[\frac{\partial}{\partial\bar{a}}+i\frac{\pi k}{4}\frac{(\bar{a}-a)\tau}{(\mathrm{Im}\,\tau)^2}\right]\psi=0 \tag{20.185}$$

となり，この解は

$$\psi=\exp\left[-i\frac{\pi k}{8}\frac{(\bar{a}-a)^2\tau}{(\mathrm{Im}\,\tau)^2}\right]f(a) \tag{20.186}$$

で与えられる．ここで，$f(a)$ は a についての正則関数である．ゲージ変換 (20.180) のもとで，

$$\psi(a+m+n\tau)=\exp\left[-i\frac{\pi k(\bar{a}-a)^2\tau}{8(\mathrm{Im}\,\tau)^2}-\frac{\pi kn(\bar{a}-a)\tau}{2\mathrm{Im}\,\tau}\right.$$
$$\left.+i\frac{\pi k\tau n^2}{2}\right]f(a+m+n\tau) \tag{20.187}$$

となることがわかる．このゲージ変換のもとで $\mathcal{A}$ は $d\Lambda_{m,n}$ だけ変化する．ただし，

$$\Lambda_{m,n}=i\frac{\pi kn(\tau\bar{a}-\bar{\tau}a)}{2\,\mathrm{Im}\,\tau} \tag{20.188}$$

である．したがって，ψ の変化は $\exp(i\Lambda_{m,n})\psi$ で与えられなければならない．変換 (20.187) がこの値と同じであることを要請すると

$$f(a+m+n\tau)=\exp\left[-i\frac{\pi kn^2\tau}{2}-\pi ikna\right]f(a) \tag{20.189}$$

を得る．これは，$f(a)$ がヤコビの Θ 関数であることを示している．この関数に作用する $\bar{a}$ は $(2\,\mathrm{Im}\,\tau/k\pi)(\partial/\partial a)+a$ の演算子で表される．このとき，ゼロモード波動関数の内積は

$$\langle f|g\rangle=\int\exp\left[-\frac{\pi k\bar{a}a}{2\,\mathrm{Im}\,\tau}+\frac{\pi k\bar{a}^2}{4\,\mathrm{Im}\,\tau}+\frac{\pi ka^2}{4\,\mathrm{Im}\,\tau}\right]\bar{f}g \tag{20.190}$$

である．よって，次の波動関数を導入すると便利である．

$$\begin{aligned}\Psi&=\exp\left[\frac{\pi ka^2}{4\,\mathrm{Im}\,\tau}\right]f(a)\\&=\exp\left[\frac{\pi ka^2}{4\,\mathrm{Im}\tau}\right]\Theta(a)\end{aligned} \tag{20.191}$$

この関数に作用する $\bar{a}$ は，

$$\bar{a}=\frac{2\,\mathrm{Im}\,\tau}{\pi k}\frac{\partial}{\partial a} \tag{20.192}$$

で表される．

20.6.8 非アーベル型ゲージ理論における θ 真空

4 次元時空間上の非アーベル型ゲージ理論を考えよう．ゲージ群はコンパクト・リー群 G であるとする．ゲージを $A_0 = 0$ に選ぶと，ゲージポテンシャルは空間 3 成分 A_i のみをもち，これらはリー代数の値をもつ反エルミートなベクトル場であるとみなせる．$A_0 = 0$ の選択はゲージを完全に固定するものではない．つまり，時間によらないゲージ変換を行う自由度がまだ存在する．これらは，

$$A_i \to A_i' = gA_ig^{-1} - \partial_i g\, g^{-1} \tag{20.193}$$

で与えられる．ヤン–ミルズ作用はシンプレクティック 2-形式

$$\begin{aligned} \Omega &= \int d^3x\ \delta E_i^a\, \delta A_i^a \\ &= -2\int d^3x\ \mathrm{Tr}\,(\delta E_i\, \delta A_i) \end{aligned} \tag{20.194}$$

を与える．ここで，E_i^a は a でラベルされるリー代数の方向に沿った電場 $\partial_0 A_i^a$ である．E_i のゲージ変換は $E_i \to gE_ig^{-1}$ である．したがって，$g \approx 1 + \varphi$ となる無限小ゲージ変換を生成するベクトル場は

$$\xi = -\int d^3x \left[(D_i\varphi)^a \frac{\delta}{\delta A_i^a} + [E_i, \varphi]^a \frac{\delta}{\delta E_i^a}\right] \tag{20.195}$$

である．これより，

$$i_\xi \Omega = -\delta \int d^3x\ [-(D_i\varphi)^a E_i^a] \tag{20.196}$$

が得られる．よって，時間に依存しないゲージ変換の生成子は

$$G(\varphi) = -\int d^3x\ (D_i\varphi)^a E_i^a \tag{20.197}$$

となる．空間の無限遠で恒等変換となる変換に対して，$G(\varphi) = \int \varphi^a G^a$，$G^a = (D_iE_i)^a$ となる．$G^a = 0$ はヤン–ミルズ運動方程式の 1 つである．(これは理論のガウス則に当たる．) 量子化の文脈では，これは初期データに許される条件とみなされ，これにより相空間はゲージ不変な変数だけに縮小される．

16 章で議論したように，対象となる空間は

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{ \text{ゲージポテンシャル } A_i \text{の空間} \}, \tag{20.198}$$

$$\mathcal{G}_* = \{ |\boldsymbol{x}| \to \infty \text{ で } g \to 1 \text{ となる ゲージ変換 } g(\boldsymbol{x}) : \mathbf{R}^3 \to G \text{ の空間} \} \tag{20.199}$$

である．無限遠で定数要素 $g_\infty \neq 1$ となる変換 $g(\boldsymbol{x})$ はネーター対称性として振る舞う．状態はそのような変換の既約ユニタリー表現で表されるが，これらの変換は $\mathcal{G}_*$ 変換の自由度を除いてゲージ群 G と同形である．したがって，理論の物理的な配位空間は $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{G}_*$ である．16 章で議論したように，$\mathcal{G}_*$ は無数の連結された成分をもち，

$$\mathcal{G}_* = \sum_{Q=-\infty}^{+\infty} \oplus \mathcal{G}_{*Q} \tag{20.200}$$

と表される．ここで，Q はゲージ変換のホモトピー類を特徴づける巻き数である．ゲージポテンシャル $\tilde{\mathcal{A}}$ の空間はアフィン空間であり，トポロジカルに自明である．このことと $\Pi_0(\mathcal{G}_*) = \mathbf{Z}$ を組み合わせると，$\Pi_1(\mathcal{C}) = \mathbf{Z}$ となり，配位空間が可縮でないループをもつことがわかる．この一般的な議論から，量子論に角度 θ が現れなければならないことがわかる．シンプレクティック・ポテンシャルを書くことにより，これがどのように現れるかを見ることができる．

4 次元ポテンシャルのインスタントン数は

$$\begin{aligned}\nu[A] &= -\frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\, \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta})\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{16\pi^2}\int d^4x\, E_i^a F_{jk}^a \epsilon^{ijk}\end{aligned} \tag{20.201}$$

で与えられる．上の積分の密度はポテンシャル A をもちいて全微分の形で書けるが，ゲージ不変な量の全微分として書くことはできない．ゲージ変換の自由度を除いたときに特異点をもたないような任意の場の配位に対して，$\nu[A]$ は整数である．ν がゼロでない値をもつ非特異な配位を構成することができる．これはインスタントンであり，この配位については 16 章でも簡単に議論した．

配位 $A(\boldsymbol{x}, x_4)$ は $\tilde{\mathcal{A}}$ 上の経路と考えられる．ここで，x_4 は経路のパラメータである．$\nu[A]$ は

$$
\begin{aligned}
\nu[A] &= \oint K[A], \\
K[A] &= \int d^3x\, F^a_{jk} \delta A^a_i \epsilon^{ijk}
\end{aligned}
\tag{20.202}
$$

と書ける．1-形式 K を閉曲線のまわりで積分するとインスタントン数 ν が得られる．特に，インスタントンの配位に対応するループに対して，これはゼロでない値を与える．また，この 1-形式は閉じていることが次のようにわかる．

$$
\begin{aligned}
\delta K[A] &= -2 \int d^3x\ \delta \mathrm{Tr}\left[F_{jk} \delta A_i\right] \epsilon^{ijk} \\
&= -4 \int d^3x\ \mathrm{Tr}\left[(D_j \delta A_k) \delta A_i\right] \epsilon^{ijk} \\
&= -4 \int d^3x\ \mathrm{Tr}\left[\partial_j \delta A_k\, \delta A_i + [A_j, \delta A_k] \delta A_i\right] \epsilon^{ijk} \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{20.203}
$$

最後のステップで，δ の入れ換えについての反対称性，トレースの巡回不変性を使い，部分積分を行った．上の議論から，$K[A]$ は 1 次の閉形式であるが，閉曲線のまわりの積分がゼロとならない場合があるので，$K[A]$ は完全形式でないことがわかる．

したがって，(20.194) のシンプレクティック 2-形式に対応するシンプレクティック・ポテンシャルの一般形は

$$
\mathcal{A} = \int d^3x\ E^a_i \delta A^a_i + \theta\, K[A] \tag{20.204}
$$

と書ける．このポテンシャルを量子論にもちいると，理論を特徴づけるパラメータとして結合定数など以外に，新しくパラメータ θ が必要となることがわかる．(20.204) のポテンシャル $\mathcal{A}$ は作用

$$
\mathcal{S} = -\frac{1}{4} \int d^4x\ F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \theta\, \nu[A] \tag{20.205}
$$

から求められる．よって，(20.204) をもちいる効果は作用 (20.205) による汎関数積分のアプローチで再現できる．汎関数積分で重要な量は $\exp(i\mathcal{S})$ なので，θ は $0 \le \theta < 2\pi$ の値をもつ角度のパラメータであることがわかる．あるいは，$\Psi \to \exp(i\theta\Lambda)\Psi$ と再定義すると，$\mathcal{A}$ から θ 項を形式的に除くことが

できる．ただし，

$$\Lambda = -\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{Tr}\left(AdA + \frac{2}{3}A^3\right) \tag{20.206}$$

である．$2\pi\Lambda$ は $k=1$ のチャーン–サイモンズ作用 (20.151) であることに注意しよう．Λ はホモトピー的に非自明な変換のもとで不変でない．波動関数は巻き数 Q の変換のもとで $e^{i\theta Q}$ だけの位相を獲得するので，θ が上で示した範囲に制限されることがわかる．これは，式 (20.52) 以降の議論に沿うものである．

20.6.9　WZW 模型のカレント代数

WZW 作用は，2 次元ディラック行列式を計算した 17 章の議論のなかで導入された．WZW 作用それ自体で 2 次元の場の理論が定義されると考えることができる．そのため，2 次元のミンコフスキー計量をもちいることができる．このとき，力学変数は群の値をもつ場 $g(x^0, x^1)$ で与えられる．作用は

$$\mathcal{S}(g) = -\frac{k}{8\pi}\int_{\mathcal{M}^2} d^2x\,\mathrm{Tr}(\partial_\mu g g^{-1}\partial^\mu g g^{-1}) + \frac{k}{12\pi}\int_{\mathcal{M}^3}\mathrm{Tr}(dgg^{-1})^3 \tag{20.207}$$

で与えられる．第 1 項は 2 次元多様体 $\mathcal{M}^2$ 上の積分で表される．第 2 項のヴェス–ズミノ (WZ) 項では，場にもう 1 つの座標（例えば s）が含まれるように場を拡張し，この拡張に対応する積分を考える必要がある．$\mathcal{M}^3$ はその境界が 2 次元世界となる空間にとれる．つまり，$s=1$ の場が時空間に対応するように $\mathcal{M}^3 = \mathcal{M}^2 \times [0,1]$ ととれる．$s \neq 1$ へ場を拡張する仕方が異なっても，係数 k が整数である限り，物理的な結果は同じである．この量子化の要請は，遷移振幅あるいは波動関数が一価性をもつことから導かれる．この結果は 17 章でも示された．WZ 項は微分形式で表され，計量の符号に影響されないので，ここでは単に，17 章の議論がミンコフスキー計量の場合も有効であることを述べているだけである．

ミンコフスキー座標では，ポリヤコフ–ウィグマン恒等式は

$$\mathcal{S}(hg) = \mathcal{S}(h) + \mathcal{S}(g) - \frac{k}{4\pi}\int d^2x\ \mathrm{Tr}(h^{-1}\partial_i h\partial_j g\, g^{-1})(\eta^{ij} + \epsilon^{ij}) \tag{20.208}$$

となる．ここで，$\eta^{ij} = diag(1,-1)$ は 2 次元の計量であり，ϵ^{ij} はレビ-チビ

タ・テンソルである．無限小の変分 $h \approx 1+\theta$ $(\theta \ll 1)$ をとると，この恒等式は運動方程式

$$(\partial_0 - \partial_1)\left(\partial_0 g\, g^{-1} + \partial_1 g\, g^{-1}\right) = 0 \tag{20.209}$$

を与える．これはまた，

$$(\partial_0 + \partial_1)\left(g^{-1}\partial_0 g\ - g^{-1}\partial_1 g\right) = 0 \tag{20.210}$$

とも表せる．

この作用の一般的で便利な量子化として，同時刻量子化と光錐量子化の 2 つがある．時間積分で与えられる表面項からシンプレクティック・ポテンシャルを求めるのは少し困難である．これは，WZ 項の形が境界のない時空間多様体で表され，そのため時空間が 3 次元体積の境界となることがあるからである．WZ 項の変分は積分することができ，

$$\delta\mathit{\Gamma}_{WZ} = \frac{k}{4\pi}\int_{\mathcal{M}^2} \mathrm{Tr}(\delta g g^{-1} I^2) \tag{20.211}$$

となる．ただし，$I = dgg^{-1}$ である．これを再度パラメータ s で積分すると，$\mathcal{M}^2 \times [0,1]$ 上で表される WZ 項

$$\mathit{\Gamma}_{WZ} = \frac{k}{4\pi}\int_0^1 ds \int_{\mathcal{M}^2} \mathrm{Tr}\left[\partial_s g g^{-1} I^2\right] \tag{20.212}$$

を得る．以下では，この形をもちいてシンプレクティック・ポテンシャルを定義しよう．

まず，同時刻のアプローチを考えよう．時間微分を分離すると，作用は

$$\mathcal{S}(g) = -\frac{k}{8\pi}\int_{\mathcal{M}^2} d^2x\, \mathrm{Tr}(\partial_0 g g^{-1})^2 + \mathit{\Gamma}_{WZ} \tag{20.213}$$

となる．この変分をとり，時間積分で与えられる表面項をみると，シンプレクティック・ポテンシャルは

$$\mathcal{A} = -\frac{k}{4\pi}\int dx\, \mathrm{Tr}(\xi I_0) + \frac{k}{4\pi}\int \mathrm{Tr}(\xi I^2) \tag{20.214}$$

となる．ここで，$\xi = \delta g g^{-1}$ であり，最後の項では s と x についての積分がもちいられている．外微分は

$$\begin{aligned}\delta\xi &= \xi^2,\\ \delta I_1 &= \partial_1\xi + \xi I_1 - I_1\xi\end{aligned} \tag{20.215}$$

で与えられる．外微分をとると，$\mathcal{A}$ の第 2 項は全微分となり，$I^2 = dI$ をもちいると，次のように s で積分できる．

$$\begin{aligned}\delta\frac{k}{4\pi}\int \mathrm{Tr}(\xi I^2) &= \frac{k}{4\pi}\int \mathrm{Tr}\left[\xi^2 I^2 - \xi d(d\xi + \xi I - I\xi)\right] \\ &= \frac{k}{4\pi}\int \mathrm{Tr}\left[-d(\xi^2 I)\right] \\ &= \frac{k}{4\pi}\int \mathrm{Tr}\left[-\partial_1(\xi^2 I_s) + \partial_s(\xi^2 I_1)\right] \\ &= \frac{k}{4\pi}\int \mathrm{Tr}\left[\xi^2 I_1\right]. \end{aligned} \tag{20.216}$$

よって，シンプレクティック 2-形式は

$$\Omega = -\frac{k}{4\pi}\int dx\,\mathrm{Tr}\left[\xi^2 I_0 - \xi^2 I_1 - \xi\delta I_0\right] \tag{20.217}$$

と求まる．同時刻量子化を行っているので，I_0 は独立な変数とみなせることに注意しよう．

その内部縮約が ξ を θ に置き換える効果をもつようなベクトル場 $V_1(\theta)$ を考えよう．$\xi = \delta g g^{-1} = (-it^a)E_{ab}\delta\chi^b$ と展開すると，

$$V_1(\theta) = \int dx\,(E^{-1})_{bc}\theta^c\frac{\delta}{\delta\chi^b} \tag{20.218}$$

と表せる．g への $V_1(\theta)$ の作用は，左作用 $V_1(\theta)g = (-it^a)\theta^a g$ で実行される．さらに，

$$V_2(\theta) = \int dx\,f^{abc}\theta^b(I_0 - I_1)^c\frac{\delta}{\delta I_0^a} \tag{20.219}$$

と定義しよう．これは，Ω との内部縮約によって δI_0 を $[\theta, I_0 - I_1]$ で置き換える効果をもつ．$V = V_1 + V_2$ と Ω の内部縮約をとると，

$$\begin{aligned} i_V\Omega &= -\delta\int dx\left[\frac{kI_0^a\theta^a}{8\pi}\right] \\ &\equiv -\delta J_0(\theta) \end{aligned} \tag{20.220}$$

となる．したがって，V は J_0 に対応するハミルトン・ベクトル場である．

もう 1 つの重要なベクトル場として

$$W(\theta) = \int dx\,\left(\partial_1\theta^a + f^{abc}\theta^b I_1^c\right)\frac{\delta}{\delta I_0^a} \tag{20.221}$$

がある．これは，δI_0 を $\partial_1\theta+[\theta,I_1]$ で置き換える効果をもつ．Ω との縮約をとると，

$$
\begin{aligned}
i_W\Omega &= -\delta\int dx\left[\frac{k}{8\pi}I_1^a\theta^a\right] \\
&\equiv -\delta J_1(\theta)
\end{aligned}
\tag{20.222}
$$

となる．したがって，W は J_1 に対応するハミルトン・ベクトル場である．

ここで興味のあるカレントをもう一度書き出すと

$$
J_\mu^a=\frac{k}{8\pi}(\partial_\mu gg^{-1})^a \tag{20.223}
$$

となる．このポアソン括弧は

$$
\begin{aligned}
\{J_0(\theta),J_0(\varphi)\} &= -i_V\delta J_0(\varphi)=i_V\int dx\,\mathrm{Tr}\,\delta\left(\frac{k}{4\pi}I_0\varphi\right) \\
&= \frac{k}{4\pi}\int dx\,\mathrm{Tr}[\theta,I_0-I_1]\varphi \\
&= J_0(\theta\times\varphi)-J_1(\theta\times\varphi),
\end{aligned}
\tag{20.224}
$$

$$
\begin{aligned}
\{J_0(\theta),J_1(\varphi)\} &= i_V\int dx\,\mathrm{Tr}\left(\frac{k}{4\pi}\delta I_1\varphi\right) \\
&= J_1(\theta\times\varphi)-\frac{k}{8\pi}\partial_1\theta^a\,\varphi^a,
\end{aligned}
\tag{20.225}
$$

$$
\begin{aligned}
\{J_1(\theta),J_1(\varphi)\} &= -i_W\int dx\,\mathrm{Tr}\left(\frac{k}{4\pi}\delta I_1\varphi\right) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{20.226}
$$

となることがわかる．上式で，$(\theta\times\varphi)^a=f^{abc}\theta^b\varphi^c$ である．これらのポアソン括弧は

$$
\{J_+(\theta),J_+(\varphi)\}=J_+(\theta\times\varphi)-\frac{k}{4\pi}\partial_1\theta^a\varphi^a \tag{20.227}
$$

とまとめられる．ただし，$J_+=J_0+J_1$ である．また，古典的なハミルトニアンは

$$
H=\frac{4\pi}{k}\int dx\,[J_0^aJ_0^a+J_1^aJ_1^a] \tag{20.228}
$$

で与えられる．

光錐量子化では，以下の座標 u, v がもちいられる．

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t-x), & v &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t+x), \\
\partial_u &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0-\partial_1), & \partial_v &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0+\partial_1).
\end{aligned}
\tag{20.229}
$$

これらは (20.143) とは異なるが，(20.209) の構造をもつ運動方程式のもとでは，このほうが便利である．このとき，作用は

$$
\mathcal{S} = -\frac{k}{4\pi}\int \mathrm{Tr}(\partial_u g g^{-1}\partial_v g g^{-1}) + \Gamma_{WZ} \tag{20.230}
$$

となる．ここで，v を空間座標に類似する座標とみなして，u についての発展を考えよう．u 積分で与えられる表面項は $\partial_u g g^{-1}$ 項の変分から現れる．これより，

$$
\mathcal{A} = -\frac{k}{4\pi}\int_v \mathrm{Tr}(\xi\partial_v g g^{-1}) + \frac{k}{4\pi}\int_{v,s}\mathrm{Tr}(\xi(dgg^{-1})^2) \tag{20.231}
$$

となる．最後の項は再び s 積分を含むが，変分をさらにとると以前と同様に，

$$
\Omega = \frac{k}{4\pi}\int dv\,\mathrm{Tr}\left[\xi\partial_v\xi + 2\xi^2 I_v\right] \tag{20.232}
$$

を得る．運動方程式は $\partial_u I_v = 0$ となる．(20.218) で定義された $V_1(\theta)$ と Ω の内部縮約は

$$
\begin{aligned}
i_{V_1}\Omega &= \frac{k}{4\pi}\int dv\,\mathrm{Tr}\left[2\theta\partial_v\xi + 2\theta\xi I_v - 2\xi\theta I_v\right] \\
&= \frac{k}{2\pi}\int dv\,\mathrm{Tr}\left[\theta(\partial_v\xi + [\xi, I_v])\right] \\
&= -\delta\int dv\left[\frac{kI_v^a\theta^a}{4\pi}\right] \\
&\equiv -\delta J_v(\theta)
\end{aligned}
\tag{20.233}
$$

で与えられる．カレント J_v は

$$
J_v^a = \frac{k}{4\pi}(\partial_v g g^{-1})^a \tag{20.234}
$$

である．また，カレントのポアソン括弧は

$$
\{J_v(\theta), J_v(\varphi)\} = i_{V_1}\frac{k}{2\pi}\int \mathrm{Tr}(\delta I_v\varphi)
$$

$$= \frac{k}{2\pi}\int \mathrm{Tr}\left[\partial_v\theta\varphi + \theta I_v\varphi - I_v\theta\varphi\right]$$
$$= \frac{k}{4\pi}\int I_v^a(\theta\times\varphi)^a - \frac{k}{4\pi}\int \partial_v\theta^a\varphi^a$$
$$= J_v(\theta\times\varphi) - \frac{k}{4\pi}\int \partial_v\theta^a\varphi^a \tag{20.235}$$

で与えられる．

(20.227) あるいは光錐の場合の (20.235) で与えられるカレント代数はカッツ–ムーディ代数の 1 つである．

参考文献

1. 幾何学的量子化についての一般的な教科書として，次の 2 冊がある．J. Sniatycki, *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag (1980); N.M.J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Clarendon Press (1992).

2. シンプレクティック構造と古典力学の議論については，V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag (1978); V. Guillemin and S. Sternberg, *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge University Press (1990); J.V. José and E.J. Saletan, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*, Cambridge University Press (1998) を参照されたい．ダルブーの定理の証明はこれらの教科書に与えられている．

3. ダルブーの定理の別の証明については R. Jackiw, *Diverse Topics in Theoretical and Mathematical Physics*, World Scientific Pub. Co. (1995) にその概要が与えられている．

4. コヒーレント状態は物理のさまざまな分野で非常に有用である．これについては，例えば，J.R. Klauder and Bo-Sturé Skagerstam, *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics*, World Scientific Pub. Co. (1985) を参照されたい．

5. 2 次元球面およびその他の G/H ケーラー空間の量子化はボレル–ヴェイユ–ボット (Borel–Weil–Bott) の定理とコスタント (Kostant)，キリロフ (Kirillov)，スーリオ (Souriau) の研究に関係している．これについては参考文献 1 で議論されている．また，A.M. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer-Verlag (1996) も参照されたい．

6. モノポール場における荷電粒子についての本章の議論は論文 A.P. Balachandran, G. Marmo and A. Stern, Nucl. Phys. **B162**, 385 (1980) に深く関係している．

7. ディラックの量子化条件を角運動量の量子化と関連づける議論は M.N. Saha, Indian J. Phys. **10**, 141 (1936) に与えられている．

8. エニオンは物理の文献でよく取り上げられている研究課題である．特に，量子

ホール効果に現れる準粒子がエニオンと解釈できる証拠も存在する．初期の研究については，以下を参照されたい．E. Merzbacher, Am. J. Phys. **30**, 237 (1960); J. Leinaas and J. Myrheim, Nuovo Cimento **37**, 1 (1977); G. Goldin, R. Menikoff and D. Sharp, J. Math. Phys. **21**, 650 (1980); *ibid.* **22**, 1664 (1981); F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1982); F .Wilczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett. **51**, 2250 (1983). 最近のレビューについては，F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity* (World Scientific, Singapore, 1990) を参照されたい．量子ホール系におけるエニオンについては，R.B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983); *Physics and Mathematics of Anyons*, S.S. Chern, C.W. Chu and C.S. Ting (eds.) (World Scientific, Singapore, 1991) にあるさまざまな論説を参照されたい．

9. エニオンに関する本章での幾何学的記述は R. Jackiw and V.P. Nair, Phys. Rev. **D43**, 1933 (1991) に基づいている．ここで与えたシンプレクティック形式は，A.P. Balachandran, G. Marmo, B-S. Skagerstam and A. Stern, *Gauge Symmetries and Fibre Bundles*, Springer-Verlag (1983) にある自転粒子の記述とも関係している．エニオンに対する他のアプローチも存在する．その初期の研究については，以下の文献を参考にされたい．C.R. Hagen, Ann. Phys. (NY) **157**, 342 (1984); Phys. Rev. **D31**, 848, 2135 (1985); D. Arovas, J. Schrieffer, F. Wilczek and A. Zee, Nucl. Phys. **B251**, 117 (1985); M.S. Plyushchay, Phys. Lett. **B248**, 107 (1990); Nucl. Phys. **B243**, 383 (1990); D. Son and S. Khlebnikov, JETP Lett. **51**, 611 (1990); D. Volkov, D. Sorokin and V. Tkach, in *Problems in Modern Quantum Field Theory*, A. Belavin, A. Klimyk and A. Zamolodchikov (eds.), Springer-Verlag (1989).

10. エニオンが $g = 2$ をもつという結果は C. Chou, V.P. Nair and A. Polychronakos, Phys. Lett. **B304**, 105 (1993) で与えられている．

11. チャーン–サイモンズ項は S.S. Chern and J. Simons, Ann. Math. **99**, 48 (1974) による．これは以下の論文によって物理の分野に紹介された．R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. **D23**, 2291 (1981); J. Schonfeld, Nucl. Phys. **B185**, 157 (1981); S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982); Ann. Phys. **140**, 372 (1982). いまやチャーン–サイモンズ理論は物理，数学の広範な問題に応用されている．また，次の素晴らしい論文でウィッテンはチャーン–サイモンズ理論がジョーンズ多項式およびその他の結び目不変量を導くことを示した．E. Witten, Commun. Math. Phys. **121**, 351 (1989). チャーン–サイモンズ理論のハミルトニアン量子化に関する初期の論文としては，次の文献がある．M. Bos and V.P. Nair, Phys. Lett. **B223**, 61 (1989); Int. J. Mod. Phys. **A5**, 959 (1990)（本章の議論の多くはこの論文に沿った.）; S. Elitzur, G. Moore, A. Schwimmer and N. Seiberg, Nucl. Phys. **B326**, 108 (1989); J.M.F. Labastida and A.V. Ramallo, Phys. Lett. **B227**, 92 (1989); H. Murayama, Z. Phys. **C48**, 79 (1990); A.P. Polychronakos, Ann. Phys. **203**, 231 (1990); T.R. Ramadas, I.M. Singer and J. Weitsman, Comm. Math. Phys. **126**, 409 (1989); A.P. Balachandran, M. Bourdeau and S. Jo Mod. Phys. Lett. **A4**, 1923 (1989); G.V. Dunne, R. Jackiw and C.A. Trugenberger, Ann. Phys. **149**, 197 (1989).

12. チャーン–サイモンズ理論の幾何学的量子化についての詳細は S. Axelrod, S. Della Pietra and E. Witten, J. Diff. Geom. **33**, 787 (1991) で議論されている．

13. 16 章でも紹介したように，θ パラメータについての文献には C.G. Callan, R. Dashen and D. Gross, Phys. Lett. **B63**, 334 (1976); R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **37**, 172 (1976) がある．空間多様体が単純連結でない場合には，真空角の数が増える．これについては，例えば，A.R. Shastri, J.G. Williams and P. Zwengrowski, Int. J. Theor. Phys. **19**, 1 (1980); C.J. Isham and G. Kunstatter, Phys. Lett. **B102**, 417 (1981); J. Math. Phys. **23**, 1668 (1982) を参照されたい．

14. WZW 模型は，非アーベル型のボソン化と関連して，ウィッテンによって導入された．E. Witten, Commun. Math. Phys. **92**, 455 (1984)．この模型は非常に重要な研究対象となっている．というのも，これは 2 次元の共形場の理論であり，群とレベル数を選ぶことによってさまざまな有理型共形場の理論が得られるからである．この理論の発展については P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, *Conformal Field Theory*, Springer-Verlag (1996) で概観できる．本章で求めたポアソン括弧はウィッテンの原論文で導出された．

訳者あとがき

場の量子論の基本的な手法と概念を学ぶことは，現代物理学の習得においては不可欠であり，これまでにも多くの教科書が世に出ている．ただ,「まえがき」にもあるように，場の量子論が扱う範囲はいまや膨大である．そのため，各教科書はどのようなテーマに重点を置くかによって特徴づけられる．本書は，場の量子論のごく入門的な部分から解きほぐし，さまざまなトピックを現代的な視点から系統的に概観することを目指した新しいスタイルの意欲的な教科書である．

基礎編では，場の量子論の標準的な内容が扱われており，特に汎関数積分表示による摂動的な場の理論の取り扱い方に重点が置かれている．汎関数積分表示をもちいる利点は，ファインマン則がおのずから満たされているという点だけでなく，ゲージ理論や自発的対称性の破れを場の理論として系統的に記述できる点にある．また，この表示法は場の理論のトポロジカルな側面，特にアノマリーの解釈においても非常に有用である．基礎編の扱っている内容は標準的ではあるが，書かれている内容がじっくり練られ深い考察が加えられている点にこの本の大きな特徴がある．特に基本概念の説明では常に基本に立ち返った解説と式変形がなされており，公式を当てはめて議論を省略するといったことは，まったくと言ってよいほど見あたらない．また専門家でもはっとするような記述や説明もあり，初学者だけでなく専門家や他の分野の研究者にも十分に読み応えのあるものとなっている．

発展編では，場の量子論のトポロジカルな側面に重点が置かれている．アノマリーについては 2 つの章をあて，基本的な摂動計算から始まり，指数定理との関係などが丁寧に解説されている．他の章では，ゲージ場の配位空間，有限温度の場の量子論，ゲージ理論の非摂動的な取り扱い方などのテーマに

ついて踏み込んだ解説がなされている．これらの理解に不可欠な数学についても，初学者がわかるように十分に説明されている．これらは，著者が長く研究を続けてきたテーマであり，その解説は明快である．このような発展的な内容を系統立てて扱った教科書はこれまでにあまり例がなく，その点で本書は新しいスタイルの場の量子論の教科書であると言えよう．後半での発展的な内容については，一読では理解できない部分もあるかもしれないが，その場合でも，丁寧な参考文献のリストが載せられており，興味ある読者が原論文を参照できるよう配慮されている．

本書で扱われているトピックは，標準的な素粒子理論の話題（QED，繰り込み，QCD，標準模型など）にとどまらず，物性理論や量子統計力学の話題（スピン波，デバイ遮蔽，ランダウ減衰，非平衡現象など）に至るまで多岐に及ぶ．本書の主眼は，このように多様な物理現象の背後に広がる，場の量子論を基礎とした理論的な枠組みをじっくり理解し解明することである．そのため，構成上，各々の物理現象についての説明は最小限にしかなされていない．それらについてより詳しく知りたい読者は，本書と合わせて，該当するテーマに重点をあてた教科書を併用していただきたい．

翻訳を始めた当初は，いま敢えて場の量子論の教科書を訳す意義があるのか半信半疑であった．しかし，翻訳を進めるほどに本書の素晴らしさを再認識・再発見し，いまでは我々自身の研究でも本書を活用している．ぜひ読者の皆さんも，本書を手にとって場の量子論の奥深い世界を探索し，さらにその先に広がる未知の世界へと歩んでいってもらいたい．もし本書がそのような歩みの道しるべとなるのであれば，訳者共々，望外の喜びである．

翻訳にあたっては，できるだけ平易な日本語で訳すことを心がけた．何度も原著と読み比べて誤訳のないよう注意するとともに，日本語として不自然な表現は避けたつもりである．また，原著にあった誤植をいくつか修正した．図の配置や文字のフォントについても読みやすいように変更した．原稿の校正に関しては，シュプリンガー・ジャパンのスタッフにサポートしていただいた．ここに感謝申し上げたい．

2009年9月　　阿部泰裕

磯　暁

索　引

※記載ページは各項目の末尾に示し，ローマン体が基礎編，イタリック体が発展編を表す．

■記号・欧字先頭索引

$A_0 = 0$ ゲージ, 92
BRST 対称性
　ウォード–高橋恒等式, 234
　カルテット場, 232
　作用の—, 228
　状態に作用する, 232
　電荷演算子, 230
β 関数
　スカラー場, 200
　ヤン–ミルズ理論, 252
CPT 定理, 270
η' 質量, *20*
γ 行列のトレース, 111
PCAC 関係式, 310
π-π 散乱, 194, 308
π 中間子と核子の相互作用, 194, 307
π 中間子の崩壊, 98, 113, *17*
ρ 中間子の崩壊, 117
S 行列
　演算子公式, 87
　簡約公式, 73, *85*
　行列要素, 72
S 行列汎関数
　S 行列の要素, 72
　演算子公式, 89
　公式, 71
　汎関数積分, 130
　有効作用, 147
θ パラメータ, 302, *89*, *106*, *269*, *299*
Z_N 渦糸, *215*
Z_N 対称性, *214*

■和文索引

●あ行

アインシュタイン方程式, *39*
アティヤ–シンガーの指数定理, *112*
アドラー–バーディーンの定理, *11*
アドラー–ワイスバーガーの和則, 327
アブリコソフ–ニールセン–オルセン渦糸, *207*
アーベル型ヒッグス模型, *207*

異常磁気モーメント, 182
異常次元, 200
1 粒子既約ファインマン図, 143
インスタントン
　θ パラメータ, *301*
　インスタントン数, *59*, *105*, *300*
　軸性 $U(1)$ 問題, *21*
　指数定理, *110*
　トフーフト相互作用, *114*
　場の配位, *107*
　バリオン数の破れ, *116*
　フェルミオン汎関数積分, *113*
　ボゴモルニー不等式, *109*

ウィグナー回転, 337
ウィグナーの $\mathcal{D}$ 関数, 290, 336, *239*, *244*, *280*
ウィックの定理, 74
ウィルソンの格子作用, *242*
ウィルソン・ループ演算子
　格子，強結合, *246*
　定義, 214
　面積則, *204*
ヴェイユ準同形, *48*, *71*
ヴェス–ズミノ–ウィッテン模型

カッツ–ムーディ代数, *307*
作用, *135*
正準 2-形式, *304*
正準 2-形式, 光錐, *306*
2 次元のディラック行列式, *143*
ポアソン括弧, *305*
ポアソン括弧, 光錐, *306*
ポリヤコフ–ウィグマン恒等式, *137*, *144*
レベル数, *137*
ヴェス–ズミノ条件, *10*
ウォード–高橋恒等式
BRST 対称性, 234
$O(N)$ 理論, 260
QED, 180, 262
低エネルギー定理, 270
ヤン–ミルズ有効作用, 238
渦糸
Z_N 不変性, *215*
アブリコソフ–ニールセン–オルセン, *207*

エニオン, 346, *89*, *284*
エネルギー運動量
一般相対論, 45
電磁場, 45
ベリンファンテ・テンソル, 44
ポアンカレ対称性, 42
エネルギー運動量テンソル
スカラー場, 28
エーリング・ポテンシャル, 181

オイラー数, *44*, *73*

●か行
ガウス条件, 217
ガウスの絡み数, *212*
ガウス–ボンネの定理, *73*
荷電共役, 266
カビボ–小林–益川行列, 324
絡み数, *212*
カルタン–キリング計量, 290
完全性
運動量の固有状態, 2
平面波スピノール, 6

幾何学的量子化
—と $\mathcal{H}^1(\mathcal{M},\mathbf{R})$, *267*
—と $\mathcal{H}^2(\mathcal{M},\mathbf{R})$, *269*
S^2 と $SU(2)$ 代数, *275*
コヒーレント状態, *272*
正則偏極, *266*
前量子化演算子, *264*
前量子化束, *262*
チャーン–サイモンズ理論, *291*
偏極, *265*
ギャップ方程式, *192*
共形変換, 50
強磁性体, 298
共変微分, 208, *38*
キリング方程式, 345
共形, 49
ミンコフスキー計量, 49

クォークの質量, 300
久保公式, *173*
久保–マーティン–シュウィンガー条件, *155*
クライン–ゴルドン方程式, 3
クライン–仁科公式, 112
繰り込み
BPHZ の方法, 184
QED, 1 ループ, 179
QED の Z 因子, δm, 173
Z 因子, ヤン–ミルズ理論, 239
カウンター項, 183
再帰公式, 186
スカラー場の Z 因子, 157
森公式, 188
ワインバーグの定理, 191
繰り込み群方程式
スカラー場, 196
臨界指数, 203
繰り込み不可能な理論, 193
クリストッフェル記号, *38*
クリフォード代数
基本定理, 4
交換関係, 4
グリボフ問題
ゲージ固定, 226
3 次元, *69*
非自明なファイバー束, *68*
グルーボール, *226*
クーロン–グリーン関数, 92

計量, *36*

経路積分
　$\mathcal{H}^2(\mathcal{C})$ の場合, *89*
　$\Pi_1(\mathcal{C})$ の場合, *86*
　QCD の, *104*
　θ パラメータ, *105*
　ヴェス–ズミノ項, *89*
　時間発展の核, *75*
　シュレーディンガー方程式, *79*
　ホイヘンスの原理, *86*
ゲージ原理
　一般論, 207
　電磁力学, 97
ゲージ選択
　$A_0 = 0$ ゲージ, 92
　放射ゲージ, 93
　ユニタリーゲージ, 315
　ランダウゲージ, 226
ゲージ場
　ゲージポテンシャル, 208
　場の強さ, 209
　微分形式, *58*
ゲージ変換
　—の空間, 218, *99*
ゲージポテンシャル
　—の空間, 220, *98*
ゲージ理論
　BRST 対称性, 228
　配位空間, 221
ケーラー多様体, *42*, *279*
ゲルマン–大久保の質量公式, 308

高温
　次元縮小, *189*
　対称性の回復, *191*
光学定理, 312
交差対称性, *227*
光子
　共変伝播関数, 96
　自己エネルギー, 175, 180
　偏極ベクトル, 93
　モード展開, 93
　横波伝播関数, 94
構造因子, 109
硬熱ループ, *166*
黒体放射, *159*
コセット空間, 289
コヒーレント状態, *272*
コホモロジー群, *43*
ゴールドバーガー–トライマンの関係式,
　　307
コールマン–ワインバーグ・ポテンシャル, 151, 167
コンプトン散乱
　スカラー粒子, 101
　低エネルギー定理, 113, 270
　電子, 109

●さ行

最小結合, 96
最小引算法, 247
散乱断面積
　一般論, 82

時間反転, 268
シグマ模型
　コセット空間, 292
　主カイラル模型, 292
　汎関数積分, 134, 139
次元の転化, 252, *223*
質量のあるベクトル粒子, 240
自発的対称性の破れ
　PCAC, 310
　カイラル・カレント, 309
　カレント, 297
　ゴールドストンの定理, 286
　有効作用, 295
シュウィンガー–ダイソン方程式, 204
　φ^4 理論, 146
　一般形, 145
　対称性の回復, *191*
　非平衡状態, *179*
シュウィンガー模型, *144*
重力
　アインシュタイン方程式, *39*
シュレーディンガー場, 84
真空のファインマン図, 78, 142
真空偏極, 175, 180
シンプレクティック構造, 24, *253*

スカラー場
　β 関数, 200
　異常次元, 200
　生成汎関数, 58, 61, 68, 71
　遅延グリーン関数, 55
　熱伝播関数, *152*

ファインマンの伝播関数, 55
分配関数, *151*
ユークリッド化された伝播関数, 57
スキルミオン
—とラージ N, *232*
スピンとフレーバー, *239*
トポロジカル・カレント, *233*
バリオン数, *235*
ストークスの定理, *32*
ストーン–フォン・ノイマン定理, 330
スピン統計定理, 18, 39
スピン波, 298
スラフノフ–テイラー恒等式, 236

正準 1-形式, 23, *254*
正準 2-形式, 24, *253*
正準変換, 24, *255*
生成汎関数
自由スカラー場, 58, 61
自由ディラック場, 65
相互作用のあるスカラー場, 68, 71
汎関数積分, 124, 127
ヤン–ミルズ理論, 225
正則化
カウンター項, 195
次元正則化, 242
定義, 155
パウリ–ヴィラース, *1*
量子異常, *1*
ゼロ点エネルギー
真空のローレンツ不変性, 33
スカラー, 15
ディラック場, 36
漸近的自由性, 203, 251, *201*

相空間
光錐量子化, 48
定義, 23
リューヴィル測度, *258*

●た行
対称性
QCD の対称性, 301
ウィグナー表示, 257, 285
南部–ゴールドストン表示, 257, 277, 285
対称性の回復
高温, *191*
標準模型, *194*
ダランベール演算子, 3
ダルブーの定理, *258*

チェレンコフ放射, 115, *176*
遅延関数
—と有限温度, *172*
遅延グリーン関数
スカラー場, 55
相互作用のある場, 88
チャーン–サイモンズ
5-形式, *124*
作用, 210
3-形式, *20*, *60*, *105*
$2n+1$-形式, *123*
理論，量子化, *291*
レベル量子化, *295*
頂点関数, 71

ツィマーマンの森公式, 188
強い CP 問題, *106*

デイジー・ダイヤグラム, *192*
ディラック場
生成汎関数, 65
ファインマンの伝播関数, 62
ディラック・モノポール
荷電粒子, *282*
ディラック・ストリング, *57*
ディラックの量子化条件, *66*, *94*, *284*
場，ポテンシャル, *56*
ディラテイションのカレント, 51
デバイ遮蔽
WZW 作用, *170*
アーベル場, *159*
非アーベル型ゲージ場, *165*
デバイ–ワラー因子, 108
電荷演算子
ゲージ理論, 216
ディラック場, 37, 42
複素スカラー場, 41
電子の自己エネルギー, 173
電磁力学
BRST 対称性, 232
QED の作用, 99
S 行列汎関数, 99
ウォード–高橋恒等式, 262
荷電共役, 266

カルテット機構, 232
光子の自己エネルギー, 175, 180
作用, 91
時間反転, 268
頂点関数の補正, 177
電子の自己エネルギー, 173
パリティ, 264
微分形式, *54*
マクスウェル方程式, 91
ユークリッド化された QED, 132
伝播関数
グルーオン, 227
グルーオン，1 ループ, 242
グルーオン，ピンチング項, 250
ゴースト, 227
スカラー場, 55
スカラー場，有限温度, *152*
フェルミ粒子, 62
フェルミ粒子，有限温度, *154*
有限温度，虚時間, *186*
点粒子の作用, 330

等長変換群, 345
特性類
$\hat{A}$-種数, *71*
オイラー類, *72*
チャーン指標, *71*
チャーン類, *70*
閉じ込め
仮説, *202*
双対超伝導, *204*
面積則, *204*
トフーフト代数, *215*
トフーフト・テンソル, *109*
トフーフトの有効相互作用, *114*
トフーフト–ポリヤコフ·モノポール, *218*
トフーフト・ループ演算子, *213*
トポロジカル多様体, *23*
トムソン断面積, 104, 112
ドルボー複体, *274*
ドレル–ハーンの和則, 274

●な行

入射場の演算子, 86
ニールセン–二宮の定理, *249*

●は行

ハイゼンベルクの運動方程式, 30
排他律, 18
パウリ–ルバンスキー・ベクトル, 334
バーグマン表示, *273*
波動関数
スカラー場の真空, *82*
チャーン–サイモンズ理論, *293*
ハミルトン・ベクトル場, *256*
バリオン数の破れ, *115*
パリティ, 264
ハール測度, *243*
汎関数積分
格子ゲージ理論, *243*
スカラー場, 122
生成汎関数, 124
ディラック場, 127
非平衡, *178*
分配関数, *185*
ヤン–ミルズ理論, 225
反ドジッター空間, 345

微細構造定数, 103
非線形シグマ模型, 292
ヒッグス機構, 313
ヒッグス粒子, 323
微分形式
k-形式, *27*
1-形式, *25*
外積代数, *31*
外微分, *28*
完全形式，閉形式, *32*
ストークスの定理, *32*
積分, *30*
体積形式, *33*
発散 δ, *34*
引き戻し, *28*
ポアンカレの補題, *32*
ホッジ双対, *33*
リー微分, *35*
微分同相写像, *24*, *29*, *126*, *255*
非平衡現象
カダノフ–ベイム方程式, *180*
時間経路, *178*
ボルツマン方程式, *182*, *183*
標準模型
CKM 行列, 324
CP 対称性の破れ, 326
W, Z 粒子の質量, 322

構成粒子, 319
混合アノマリー, *127*
作用, 320
対称性の回復, *194*
バリオン数の破れ, *115*
湯川項, 323
ワインバーグ角, 322

ファイバー束
接続, *63*
接ベクトル，余接ベクトル, *62*
定義, *61*
ホモトピー系列, *65*
メビウスの帯, *62*
ファインマンの分母公式, 160
ファデーエフ–ポポフ
行列式, 223
ゴースト, 224
ファリーの定理, 269, *4*
フェルミ粒子の重複問題, *246*
複素幾何学
概複素構造, *41*
ケーラー多様体, *42*
ケーラー・ポテンシャル, *42*
ナイエンハイス・テンソル, *41*
ニューランダー–ニレンベルグの定理, *42*
複素射影空間, 292, *43*, *66*, *279*
プラズマ振動, *163*
フラックス
公式, 83
プランク質量, 195
フランク–タム公式, 117
フレーム場, *37*
フロベニウスの定理, *25*
分配関数
格子ゲージ理論, *243*
スカラー場, *151*
汎関数積分, *185*
フェルミ粒子, *153*

平行移動
ゲージ理論, 212
重力, *39*
ベクトル場
定義, *24*
ハミルトン, *256*
ベッチ数, *44*
ベネチアーノ–ウィッテン公式, *20*
ヘリシティ, 343
ベリンファンテ・テンソル, 45
変分原理, *261*

ポアソン括弧, 26, *256*
WZW 模型, *305*
WZW 模型，光錐, *306*
光錐量子化, *290*
ポアンカレ双対性, *44*
ポアンカレ代数, 332
ポアンカレの補題, *32*
崩壊確率
一般論, 81
時間延伸の効果, 82
放射ゲージ, 93
ボゴモルニー不等式, *109*, *222*
ボゴモルニー–プラサド–ゾマーフィールト (BPS) 極限, *222*
ボゴリューボフの再帰公式, 186
ホッジ双対, *33*
ホモトピー群
完全系列, *65*, *103*, *133*, *218*, *222*
球面, *51*
定義, *48*
リー群, *53*
ボルツマン方程式, *182*, *183*
ホロノミー, *140*
ホロノミー演算子, 214

●ま行

巻き数, *51*, *53*, *100*
松原振動数, *186*, *188*
マーミン–ワグナー–コールマンの定理, 283
マンデルスタム変数, 309

密度行列
—の作用, *149*
アンサンブル平均, *147*
スカラー場, *150*
平衡状態, *149*
リューヴィル方程式, *148*

向き付け可能な多様体, *31*

モット散乱, 104

●や行

ヤコビ多様体, *297*
ヤコビの Θ 関数, *298*
ヤン–ミルズ理論
　β 関数, 252
　BRST 対称性, 228
　作用, 210, *59*
　汎関数積分, 225

有効作用
　QED, 1 ループ, 178
　S 行列汎関数, 147
　1 粒子既約ファインマン図, 143
　擬スカラー中間子, 305
　スカラー, 1 ループ, 150, 167
　スキルミオン, *233*
　低エネルギー定理, 270
　バリオン, 307
　フレーバーアノマリー, *127*
有効電荷
　QED, 181
　ヤン–ミルズ理論, 251
湯川相互作用
　π 中間子と核子, 307
　標準模型, 323
ユークリッド化された伝播関数
　スカラー場, 57
ユニタリーゲージ, 315
ユニタリー性
　繰り込み不可能な理論, 193
　光学定理, 312
　条件式, 311
　断面積の上限, 312
　有効理論, 313

●ら行

ラザフォード散乱, 106
ラージ N 展開
　因子化, *226*
　カイラル対称性の破れ, *228*
　二重線, *224*
ラムシフト, 181
ランダウ–ギンツブルク理論, *207*
ランダウゲージ, 226
ランダウ減衰, *175*
ランダウの極, 181

リー群のコホモロジー, *44*
リッチ・スカラー, *39*
リッチ・テンソル, *39*
リー微分, *35*
リーマン曲率, *37*
リーマン多様体, *37*
量子異常
　—と汎関数測度, *119*
　π 中間子の崩壊, *17*
　QCD の軸性 $U(1)$ アノマリー, *17*
　$U_A(1)$ 問題, *19*
　アドラー–バーディーンの定理, *11*
　アドラー–ベル–ジャッキーフの結果, *8*
　アノマリー多項式, *126*
　ヴェス–ズミノ項, *125*
　ヴェス–ズミノ条件, *10*
　係数の量子化, *125*
　混合アノマリー, *127*
　三角ダイヤグラム, *4*
　指数定理, *121*
　大域アノマリー, *130*
　トフーフトの一致条件, *127*
　$2n$ 次元の—, *126*
　バーディーンの式, *12*
　バリオン数, *15*
　標準模型, *13*
　藤川の方法, *119*
　レプトン数, *15*
量子色力学
　Λ パラメータ, 252
　θ パラメータ, *105*, *299*
　アノマリーの有効作用, *127*
　カイラル対称性の破れ, 302
　経路積分, *104*
　軸性 $U(1)$ 問題, *19*
　軸性アノマリー, *17*
　漸近的自由性, 251

ループ展開, 149

捩率テンソル, *37*
連結グリーン関数, 140

ローレンツ変換
　スピノール, 5
　ベクトル, 332

●わ行

ワインバーグ角, 322
ワインバーグの定理, 191

著　者

V. P. ナイア (V. Parameswaran Nair)

Physics Department
City College of the CUNY
160 Convent Avenue
New York, NY 10031
USA

訳　者

阿部 泰裕（あべ やすひろ）

ニューヨーク市立大学大学院博士課程修了．Ph. D.

磯 暁（いそ さとし）

高エネルギー加速器研究機構准教授，理学博士．

現代的な視点からの場の量子論 発展編

2009 年 12 月　6 日　初版

著　者　V. P. ナイア
訳　者　阿部 泰裕／磯 暁
発行者　深田 良治
発行所　シュプリンガー・ジャパン株式会社
〒102-0073　東京都千代田区九段北 1 丁目 11 番 11 号 第 2 フナトビル
TEL (03) 6831-7005（営業直通）
`http://www.springer.jp`
印刷所　日経印刷株式会社

ISBN 978-4-431-10074-4　C3042　　Printed in Japan